محاضرات في
الرياضيات التطبيقية
(المقرر ر 337)

اعداد
أ. د. حسام لوتي سعد

جامعة البصرة ، كلية العلوم
قسم الرياضيات

الفصل الأول

دالة كاما

1.1 دالة كاما

تعريف 1.1. تعرف دالة كاما كالآتي

$$\boxed{\Gamma(n)=\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx, \quad n>0.} \tag{1.1}$$

التكامل في (3.1) متقارب عندما $n>0$.

1.2 خصائص دالة كاما

مثال 1.1.

$$\boxed{\Gamma(1)=1.}$$

الحل:

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty x^{1-1}e^{-x}=\int_0^\infty e^{-x}=-e^{-x}\Big|_0^\infty=-(0-1)=1.$$

مثال 1.2.

$$\boxed{\Gamma(n+1)=n\Gamma(n).} \tag{1.2}$$

الحل:

$$\Gamma(n+1)=\int_0^\infty x^{n+1-1}e^{-x}=\int_0^\infty x^n e^{-x}dx.$$

نفرض

$$\begin{aligned} u &= x^n \qquad \Rightarrow \qquad du = nx^{n-1}dx \\ dv &= e^{-x}dx \qquad \Rightarrow \qquad v=-e^{-x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= -x^n e^{-x}\Big|_0^\infty + n\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx \\ &= -(\lim_{x\to\infty} x^n e^{-x} - 0) + n\Gamma(n). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} x^n e^{-x} &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\frac{\infty}{\infty} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\frac{\infty}{\infty} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\frac{\infty}{\infty} \\ &\vdots \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{n!}{e^x} \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= -(0-0)+n\Gamma(n) \\ &= n\Gamma(n). \end{aligned}$$

مثال 1.3. اذاكانت n عدد صحيح غير سالب فأن

$$\boxed{\Gamma(n+1)=n!.} \tag{1.3}$$

الحل:

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) \\ &= n\cdot(n-1)\Gamma(n-1) \\ &= n(n-1)\cdot(n-2)\Gamma(n-2) \\ &= n(n-1)(n-2)\cdots 1\cdot\Gamma(1) \\ &= n(n-1)(n-2)\cdots 1 \\ &= n!. \end{aligned}$$

أي ان العلاقة (1.3) تعرف قيم دالة كاما للاعداد الصحيحة الموجبة والصفر

$$\Gamma(5) = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

الآن سنعرف دالة كاما لقيم n السالبة. من المعادلة (1.2)

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}. \tag{1.4}$$

اذا كان $-1 < n < 0 \Rightarrow 0 < n+1 < 1$ يمكن حساب قيمة دالة كاما عندما $-1 < n < 0$

اذا كان $-2 < n < -1 \Rightarrow -1 < n+1 < 0$ يمكن حساب قيمة دالة كاما عندما $-2 < n < -1$

اذا كان $-3 < n < -2 \Rightarrow -2 < n+1 < -1$ يمكن حساب قيمة دالة كاما عندما $-3 < n < -2$

نستمر بنفس الطريقة أعلاه لحساب دالة كاما في كل الفترات المفتوحة السالبة.
بتكرار استخدام المعادلة (1.4) نحصل على

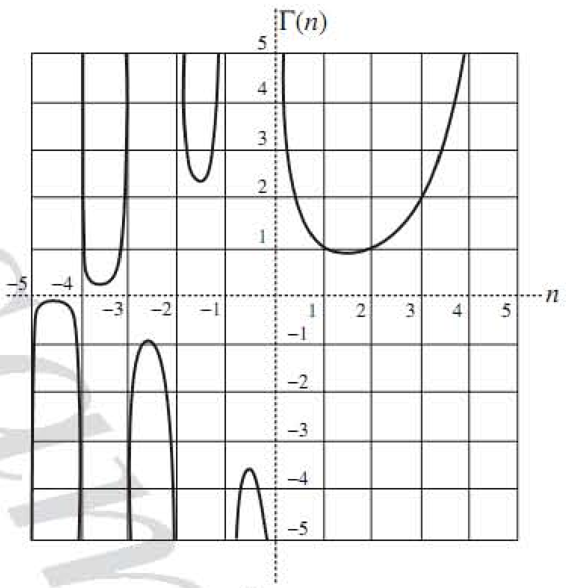
مثال 1.4.

$$\boxed{\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+k)}{n(n+1)\cdots(n+k-1)}.} \tag{1.5}$$

الحل:

$$\begin{aligned}
\Gamma(n) &= \frac{\Gamma(n+1)}{n} \\
&= \frac{\Gamma(n+2)}{n(n+1)} \\
&= \frac{\Gamma(n+3)}{n(n+1)(n+2)} \\
&\vdots \\
&= \frac{\Gamma(n+k)}{n(n+1)\cdots(n+k-1)}.
\end{aligned}$$

العلاقة (1.5) تعطينا قيمة دالة كاما عندما n عدد سالب لايساوي صفر أو عدد صحيح $(n \neq 0, -1, -2, ...)$



نلاحظ عندما تقترب n من الصفر أو عدد صحيح سالب فان $\Gamma(n) \to \mp\infty$

مثال 1.5. أثبت أن

$$\boxed{\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.}$$

الحل:

$$\begin{aligned}
\Gamma(n) &= \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx \\
\Gamma(\frac{1}{2}) &= \int_0^\infty x^{1/2-1}e^{-x}dx \\
&= \int_0^\infty x^{-1/2}e^{-x}dx.
\end{aligned}$$

نفرض

$$\begin{aligned}
x &= y^2 \quad \Rightarrow \quad dx = 2ydy \\
x &= 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \\
x &= \infty \quad \Rightarrow \quad y = \infty.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma(\frac{1}{2}) &= \int_0^\infty (y^2)^{-1/2}e^{-y^2}2ydy \\
\Gamma(\frac{1}{2}) &= 2\int_0^\infty e^{-y^2}dy. \qquad (1.6)
\end{aligned}$$

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\int_0^\infty e^{-x^2}dx.$$

$$\begin{aligned}
\left(\Gamma(\frac{1}{2})\right)^2 &= \left(2\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)\left(2\int_0^\infty e^{-y^2}dy\right)\\
&= 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dxdy\\
&= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^\infty e^{-r^2}rdrd\theta\\
&= -\frac{4}{2}\int_0^{\pi/2} e^{-r^2}\Big|_0^\infty d\theta\\
&= -2\int_0^{\pi/2}(0-1)d\theta\\
&= 2\int_0^{\pi/2}d\theta\\
&= 2\theta\Big|_0^{\pi/2}\\
&= 2(\frac{\pi}{2}-0)\\
&= \pi.
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \left(\Gamma(\frac{1}{2})\right)^2 = \pi \quad \Rightarrow \quad \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

لايجاد قيمة $\Gamma(n)$ عندما تكون n انصاف الاعداد الصحيحة الموجبة نستخدم العلاقة (1.2).

$$\begin{aligned}
\Gamma(\frac{3}{2}) &= \Gamma(\frac{1}{2}+1) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.\\
\Gamma(\frac{5}{2}) &= \Gamma(\frac{3}{2}+1) = \frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2}\Gamma(\frac{1}{2}+1) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

لايجاد قيمة $\Gamma(n)$ عندما تكون n انصاف الاعداد الصحيحة السالبة نستخدم العلاقة (1.5)

$\Gamma(-\frac{1}{2}) = ?$

$$-1 < -1/2 \quad \Rightarrow \quad 0 < -1/2+1 \quad \Rightarrow \quad k = 1$$

$$\Gamma(-\frac{1}{2}) = \frac{Gamma(-\frac{1}{2}+1)}{-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi}.$$

$\Gamma(-\frac{3}{2}) = ?$

$$-2 < -3/2 \quad \Rightarrow \quad 0 < -3/2+2 \quad \Rightarrow \quad k = 2$$

$$\Gamma(-\frac{3}{2}) = \frac{\Gamma(-\frac{3}{2}+2)}{(-\frac{3}{2})(-\frac{1}{2})} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}.$$

$\Gamma(-\frac{5}{2}) = ?$

$$-3 < -5/2 \quad \Rightarrow \quad 0 < -5/2+3 \quad \Rightarrow \quad k = 3$$

$$\Gamma(-\frac{5}{2}) = \frac{\Gamma(-\frac{5}{2}+3)}{(-\frac{5}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{1}{2})} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{-\frac{15}{8}} = \frac{\sqrt{\pi}}{-\frac{15}{8}} = -\frac{8}{15}\sqrt{\pi}.$$

ملاحظة: 1.1. عندما نستمر بنفس الطريقة أعلاه نلاحظ انه في حالة $n=-p-1/2$ حيث p عدد صحيح موجب او صفر نحصل على العلاقة التالية

مثال 1.6. أثبت أن

$$\boxed{\Gamma(-p-\frac{1}{2}) = (-1)^{p+1}\frac{2^{p+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2p+1)}\sqrt{\pi}.}$$

الحل:

$$-p-1 < -p-1/2 \quad \Rightarrow \quad 0 < -p-1/2+p+1 \quad \Rightarrow \quad k = p+1$$

$$\begin{aligned}
\Gamma(-p-\frac{1}{2}) &= \frac{\Gamma(-p-\frac{1}{2}+p+1)}{(-p-\frac{1}{2})(-p+\frac{1}{2})(-p+\frac{3}{2})\cdots(-p-\frac{1}{2}+p+1-1)} \\
&= \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{(-1)^{p+1}(p+\frac{1}{2})(p-\frac{1}{2})(p-\frac{3}{2})\cdots(\frac{1}{2})} \\
&= \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{(-1)^{p+1}\frac{(2p+1)}{2}\frac{(2p-1)}{2}\frac{(2p-3)}{2}\cdots\frac{1}{2}} \\
&= (-1)^{p+1}\frac{2^{p+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2p+1)}\sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

$\Gamma(-\frac{5}{2}) = ?$

$$\begin{aligned}
-5/2 &= -p-1/2 \quad \Rightarrow \quad p = 2. \\
\Gamma(-\frac{5}{2}) &= \frac{(-1)^3 2^3}{1\cdot 3\cdot 5}\sqrt{\pi} = -\frac{8}{15}\sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

1.3 أمثلة

مثال 1.7. جد قيمة

$$\int_0^\infty t^4 e^{-2t} dt$$

الحل: نفرض

$$\begin{aligned} x &= 2t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{dx}{2} \\ t &= 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \\ t &= \infty \quad \Rightarrow \quad x = \infty \end{aligned}$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{x}{2}\right)^4 e^{-x} \frac{dx}{2} = \frac{1}{32} \int_0^\infty x^4 e^{-x} dx.$$

نقارن الناتج مع تعريف دالة كاما

$$n - 1 = 4 \quad \Rightarrow \quad n = 5$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^4 e^{-2t} dt &= \frac{1}{32}\Gamma(5) = \frac{4!}{32} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}. \\ \therefore \quad \int_0^\infty t^4 e^{-2t} dt &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

مثال 1.8. أثبت أن

$$\int_0^1 x^m (\ln(x))^n dx = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}, \quad m > -1.$$

الحل: نفرض

$$\begin{aligned} y &= \ln(x) \quad \Rightarrow \quad x = e^y \quad \Rightarrow \quad dx = e^y dy \\ x &= 0 \quad \Rightarrow \quad y = -\infty \\ x &= 1 \quad \Rightarrow \quad y = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^m (\ln(x))^n dx &= \int_{-\infty}^0 e^{my} y^n e^y dy \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{(m+1)y} y^n dy. \end{aligned}$$

$$m > -1 \quad \Rightarrow \quad m+1 > 0$$

نفرض

$$\begin{aligned}
(m+1)y &= -z \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{z}{m+1} \quad \Rightarrow \quad dy = -\frac{dz}{m+1} \\
y &= -\infty \quad \Rightarrow \quad z = \infty \\
y &= 0 \quad \Rightarrow \quad z = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} e^{(m+1)y} y^n dy &= \int_{\infty}^{0} \frac{(-1)^n z^n e^{-z}}{(m+1)^n}(-1)\frac{dz}{m+1} \\
&= \frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}} \int_0^{\infty} z^n e^{-z} dz \\
&= \frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}} \Gamma(n+1) \\
&= \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}.
\end{aligned}$$

مثال 1.9. جد قيمة

$$\int_0^{\pi/2} \left(\tan^3(\theta) + \tan^5(\theta)\right) e^{-\tan^2(\theta)} d\theta$$

الحل:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi/2} \left(\tan^3(\theta) + \tan^5(\theta)\right) e^{-\tan^2(\theta)} d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \tan^3(\theta)\left(1 + \tan^2(\theta)\right) e^{-\tan^2(\theta)} d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \tan^2(\theta)\tan(\theta)\left(1 + \tan^2(\theta)\right) e^{-\tan^2(\theta)} d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \tan^2(\theta)\tan(\theta)\sec^2(\theta) e^{-\tan^2(\theta)} d\theta.
\end{aligned}$$

نفرض

$$\begin{aligned}
x &= \tan^2(\theta) \Rightarrow \quad dx = 2\tan(\theta)\sec^2(\theta)d\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{2} = \tan(\theta)\sec^2(\theta)d\theta. \\
\theta &= 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \\
\theta &= \pi/2 \quad \Rightarrow \quad x = \infty.
\end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi/2} \left(\tan^3(\theta) + \tan^5(\theta)\right) e^{-\tan^2(\theta)} d\theta = \int_0^{\infty} x e^{-x} \frac{dx}{2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty x e^{-x} dx \\
&= \frac{1}{2}\Gamma(2) \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$