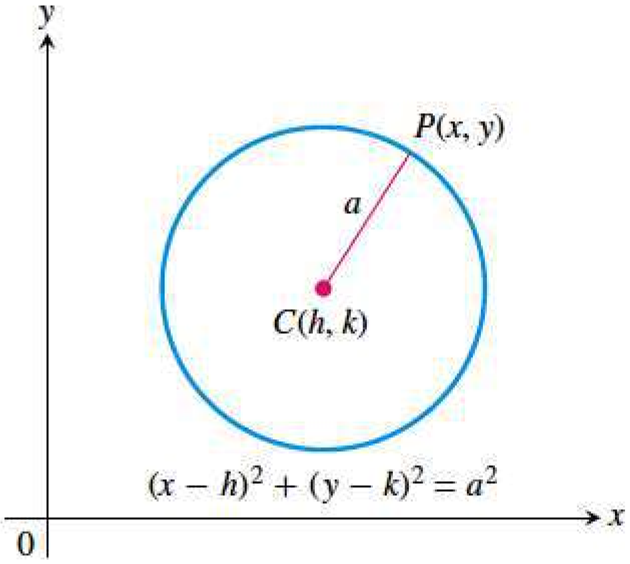
Conic sections القطوع المخروطية

Circle الدائرة



المعادلة القياسية للدائرة التي مركزها (h,k) ونصف قطرها a هي :

$$(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$$

والمعادلة العامة لها هي :

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0$$

حيث $A\,,B\,,C$ ثوابت و $a=\sqrt{h^2+k^2-C}$, $k=-B/2$, $h=-A/2$

ملاحظة : من المعادلة العامة للدائرة نلاحظ ما يلي :

١. معادلة الدائرة لا تحتوي على الحد xy .

٢. معامل x^2 يساوي معامل y^2 ويفضل ان يكون واحد

٣. يجب ان يكون $h^2+k^2-C>0$

مثال (١) : جد مركز ونصف قطر الدائرة 1. $x^2+y^2+2x-6y+6=0$

2. $x^2+y^2-10y-11=0$

الحل 1. $h=-2/2=-1$, $k=-(-6)/2=3$,

$a=\sqrt{(-1)^2+3^2-6}=2$

المركز هو $(-1,3)$ ونصف القطر 2

2. $h=0/2=0$, $k=-(-10)/2=5$, $a=\sqrt{(0)^2+5^2+11}=6$

المركز هو $(0,5)$ ونصف القطر 6

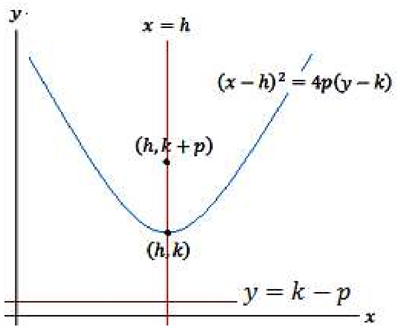
القطع المكافئ **Parabola**

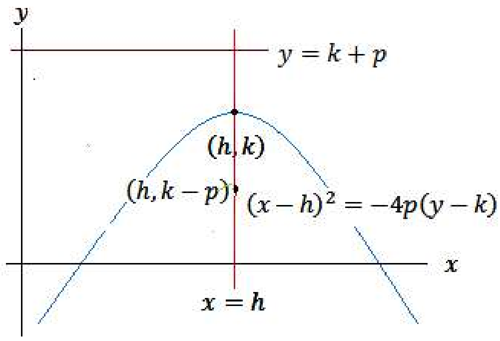
١. معادلة القطع المكافئ الذي راسه النقطة (h,k) وبؤرته النقطة $(h,k+p)$ هي :

$(x-h)^2 = 4p(y-k)$ متناظر حول المستقيم $x=h$ ومعادلة دليله $y=k-p$

٢. معادلة القطع المكافئ الذي راسه النقطة (h,k) وبؤرته النقطة $(h,k-p)$ هي :

$(x-h)^2 = -4p(y-k)$ متناظر حول المستقيم $x=h$ ومعادلة دليله $y=k+p$



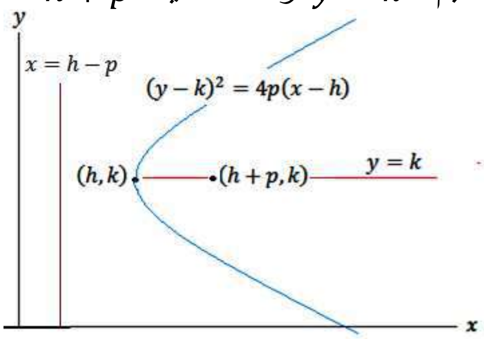


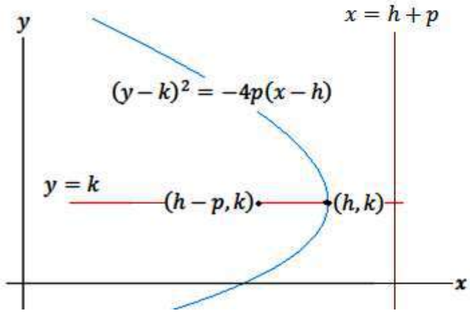
٣. معادلة القطع المكافئ الذي راسه النقطة (h,k) وبؤرته النقطة $(h+p,k)$ هي :

$(y-k)^2 = 4p(x-h)$ *متناظر حول المستقيم* $y=k$ *ومعادلة دليله* $x=h-p$

٤. معادلة القطع المكافئ الذي راسه النقطة (h,k) وبؤرته النقطة $(h-p,k)$ هي :

$(y-k)^2 = -4p(x-h)$ *متناظر حول المستقيم* $y=k$ *ومعادلة دليله* $x=h+p$





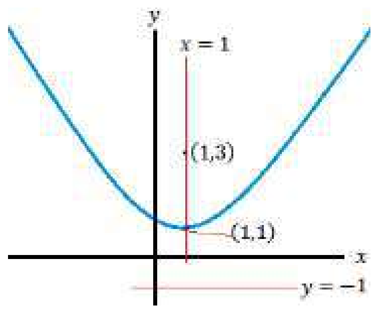
مثال (٢) : ناقش وارسم المعادلات التالية :

1. $x^2-2x-8y+9=0$

$x^2-2x+1 = 8y-8 \quad \rightarrow \quad (x-1)^2 = 8(y-1)$

المعادلة تمثل قطع مكافئ رأسه $(1,1)$ ومحور تناظره هو المستقيم $x=1$

$p=2$ وبؤرته $(1,1+2)=(1,3)$ ودليله $y=1-2=-1$

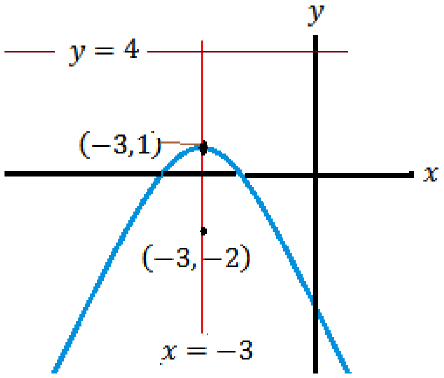


2. $x^2 + 6x + 12y - 3 = 0$

$x^2 + 6x + 9 = -12y + 12 \quad \rightarrow \quad (x + 3)^2 = -12(y - 1)$

المعادلة تمثل قطع مكافئ رأسه $(-3,1)$ ومحور تناظره هو $x = -3$

$4p = 12 \rightarrow p = 3$ وبؤرته $(-3,1-3) = (-3,-2)$ ودليله $y = 1 + 3 = 4$

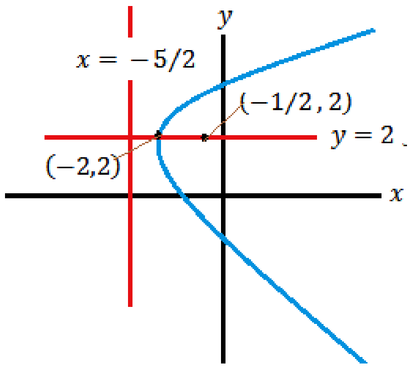


3. $y^2 - 4y - 6x - 8 = 0$

$y^2 - 4y + 4 = 6x + 12 \quad \rightarrow \quad (y - 2)^2 = 6(x + 2)$

المعادلة تمثل قطع مكافئ رأسه $(-2,2)$ ومحور تناظره هو $y = 2$

$4p = 6 \rightarrow p = 3/2$ وبؤرته $(-2 + 3/2\,, 2) = (-1/2\,, 2)$ ودليله $x = -2 - 3/2 = -5/2$

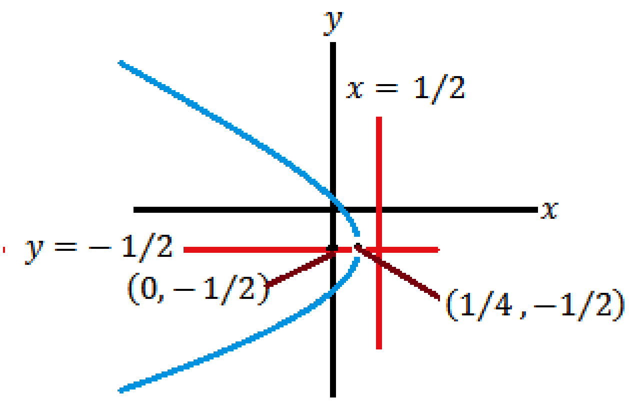


4. $y^2 + y + x = 0$

$y^2 + y + 1/4 = -x + 1/4 \quad \rightarrow \quad (y + 1/2)^2 = -(x - 1/4)$

المعادلة تمثل قطع مكافئ رأسه $(1/4\,,-1/2)$ ومحور تناظره هو $y = -1/2$

$4p = 1 \rightarrow p = 1/4$ بؤرته $(1/4 - 1/4\,, -1/2) = (0, -1/2)$ ودليله $x = 1/4 + 1/4 = 1/2$



القطع الناقص Ellipse

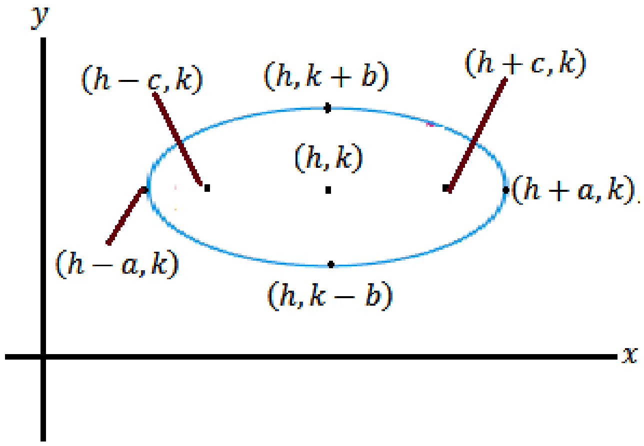
اذا كان $a > b$ و $c^2 = a^2 - b^2$ فان

١. معادلة القطع الناقص الذي مركزه (h, k) ورؤوسه $(h \mp a, k), (h, k \mp b)$ وبؤرتيه $(h \mp c, k)$ هي :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

المحور الكبير يوازي المحور السيني وعندما $k = 0$ يقع عليه

المحور الصغير يوازي المحور الصادي وعندما $h = 0$ يقع عليه

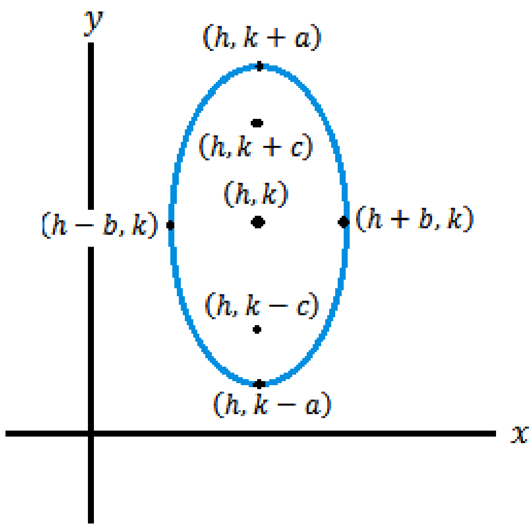


٢. . معادلة القطع الناقص الذي مركزه (h, k) ورؤوسه $(h \mp b, k), (h, k \mp a)$ وبؤرتيه $(h, k \mp c)$ هي :

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

المحور الكبير يوازي المحور الصادي وعندما $h = 0$ يقع عليه

المحور الصغير يوازي المحور السيني وعندما $k = 0$ يقع عليه



مثال (٣) : ناقش وارسم المعادلات التالية :

1. $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 4 = 0$

$$x^2 - 4x + 4 + 4y^2 - 8y + 4 = 4 \quad \rightarrow \quad \{ \quad (x-2)^2 + 4\,(y-1)^2 = 4 \quad \} \quad \div 4$$

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{1} = 1$$

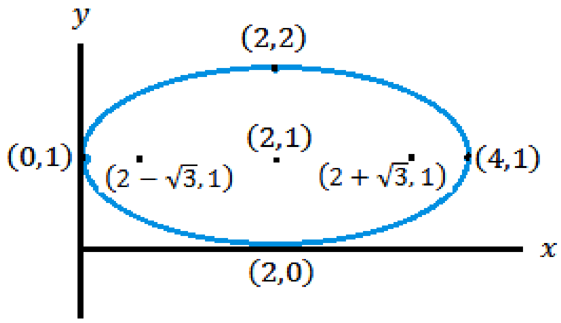
المعادلة تمثل قطع ناقص مركزه $(2,1)$

$$a^2 = 4 \quad , \quad b^2 = 1 \quad \rightarrow \quad c^2 = 3$$

رأسي المحور الكبير الموازي للمحور السيني $(2-2,1) = (0,1) \quad , \quad (2+2,1) = (4,1)$

رأسي المحور الصغير الموازي للمحور الصادي $(2,1-1) = (2,0) \quad , \quad (2,1+1) = (2,2)$

بؤرتاه $\left(2-\sqrt{3},1\right) \quad , \quad \left(2+\sqrt{3},1\right)$



2. $9\,x^2 + 4y^2 - 18x + 24y + 9 = 0$

$$9\,x^2 - 18x + 9 + 4y^2 + 24y + 36 = 36$$

$$\rightarrow \{ \quad 9\,(x-1)^2 + 4\,(y+3)^2 = 36 \quad \} \div 36$$

$$\frac{(y+3)^2}{9} + \frac{(x-1)^2}{4} = 1$$

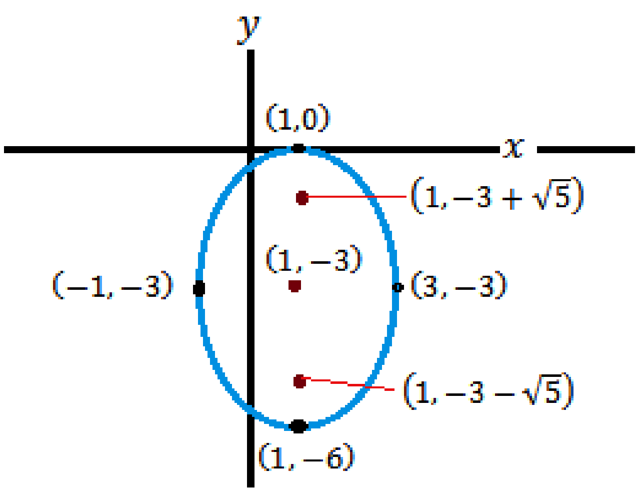
المعادلة تمثل قطع ناقص مركزه $(1,-3)$

$$a^2 = 9 \quad , \quad b^2 = 4 \quad \rightarrow \quad c^2 = 5$$

رأسي المحور الكبير الموازي للمحور الصادي $(1,-3-3) = (1,-6) \;,\; (1,-3+3) = (1,0)$

رأسي المحور الصغير الموازي للمحور السيني $(1-2,-3) = (-1,-3),\; (1+2,-3) = (3,-3)$

بؤرتاه $\left(1,-3+\sqrt{5}\right) \quad , \quad \left(1,-3-\sqrt{5}\right)$

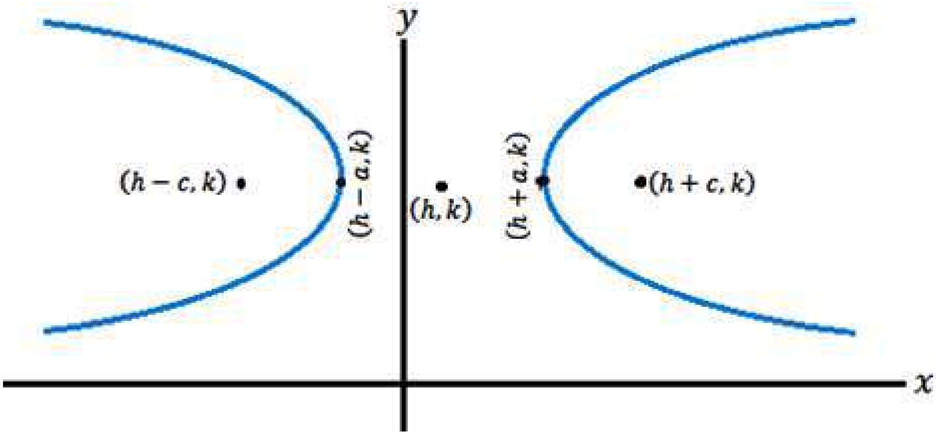


القطع الزائد Hyparabola

اذا كان $a, b \in \mathcal{R}$ و $a^2 + b^2 = c^2$ فان :

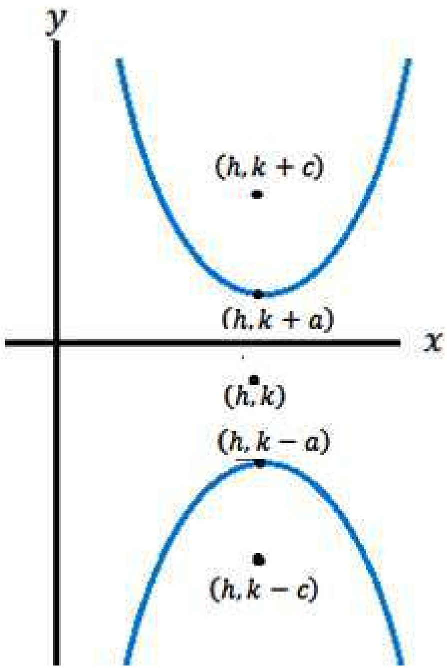
١. معادلة القطع الزائد الذي مركزه (h, k) ورأسيه $(h \mp a, k)$ وبؤرتيه $(h \mp c, k)$ هي :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



٢. معادلة القطع الزائد الذي مركزه (h, k) ورأسيه $(h, k \mp a)$ وبؤرتيه $(h, k \mp c)$ هي :

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$



مثال (٤) : ناقش وارسم المعادلات التالية :

1. $4x^2 - y^2 + 4y - 8 = 0$

$$4x^2 - y^2 + 4y - 4 - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad 4x^2 - (y-2)^2 = 4 \quad \div 4$$

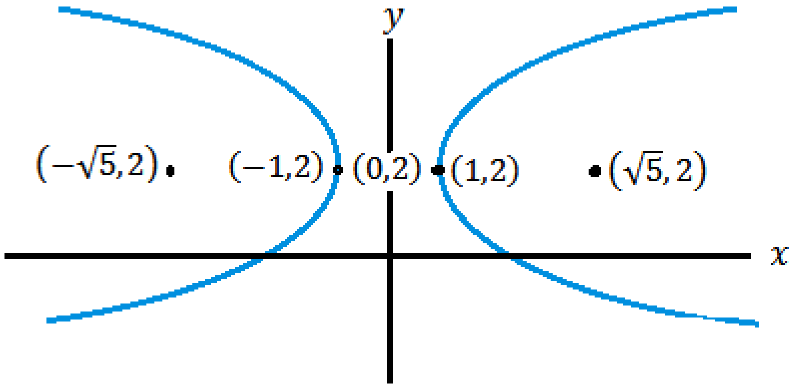
$$\frac{x^2}{1} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

المعادلة تمثل قطع زائد مركزه $(0,2)$

$a^2 = 1 \quad , \quad b^2 = 4 \quad \rightarrow \quad c^2 = 5$

الرأسان $(0-1,2) = (-1,2) \quad , \quad (0+1,2) = (1,2)$

البؤرتان $(0-\sqrt{5},2) = (-\sqrt{5},2) \quad , \quad (0+\sqrt{5},2) = (\sqrt{5},2)$



2. $4x^2 - 5y^2 - 16x + 10y + 31 = 0$

$4x^2 - 16x + 16 - 5y^2 + 10y - 5 + 20 = 0 \quad \rightarrow \quad 4(x-2)^2 - 5(y-1)^2$

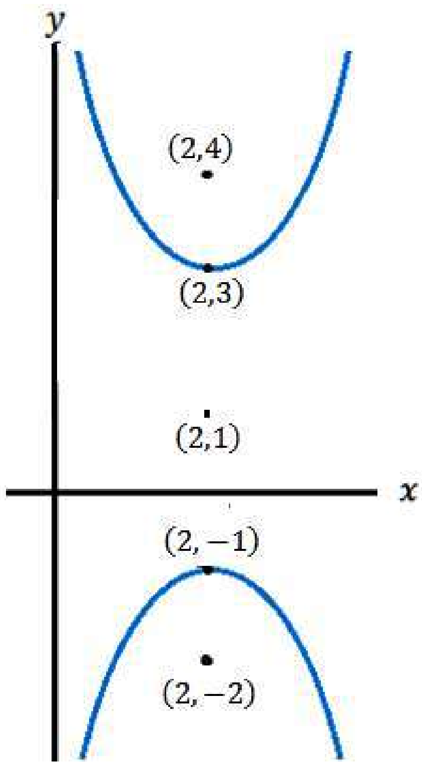
$= -20$

$$\frac{(y-1)^2}{4} - \frac{(x-2)^2}{5} = 1$$

المعادلة تمثل قطع زائد مركزه $(2,1)$

الرأسان $(2,1-2) = (2,-1) \quad , \quad (2,1+2) = (2,3)$

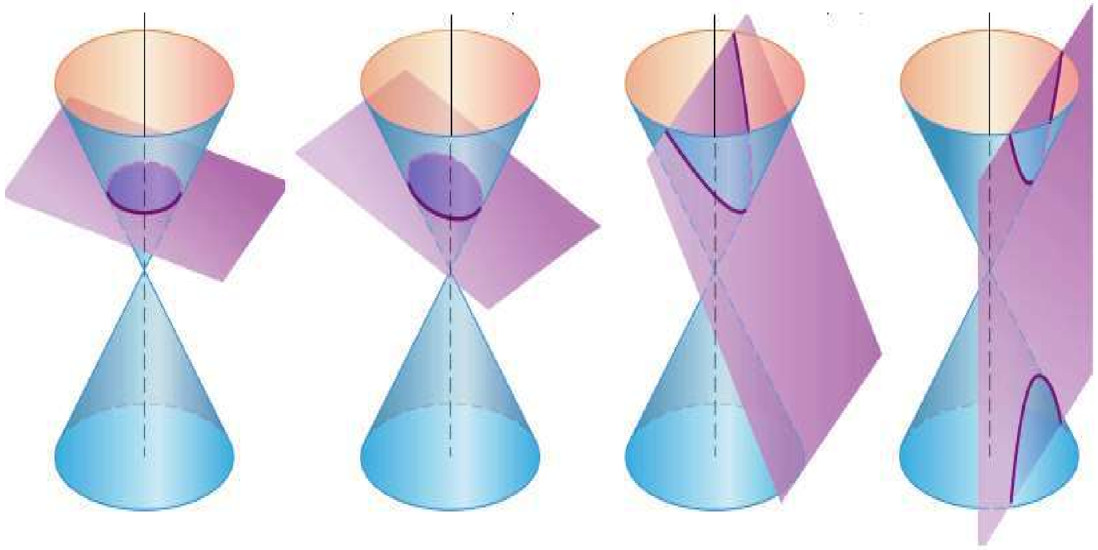
البؤرتان $(2,1-3) = (2,-2) \quad , \quad (2,1+3) = (2,4)$



تمارين

ناقش العبارات التالية معززا اجابتك بالرسم

1. $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$
2. $x^2 + y^2 - 2x - 9 = 0$
3. $x^2 + 4x - 16y - 12 = 0$
4. $5x^2 - 4y^2 + 20x + 8y - 4 = 0$
5. $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$
6. $4x^2 + 16y = 0$
7. $9\,x^2 - 4y^2 - 36x - 24y + 1 = 0$
8. $2x^2 + 2y^2 + 5y = 0$
9. $2\,x^2 + 3y^2 - 12x - 12y + 24 = 0$
10. $x^2 - 2x - 9y - 8 = 0$
11. $4\,x^2 + 9y^2 - 24x + 18y + 9 = 0$
12. $4x^2 + 5y^2 + 8x - 16 = 0$
13. $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$
14. $y^2 - 8x = 0$
15. $4\,x^2 - 3y^2 + 8x - 6y - 11 = 0$
16. $x^2 - 3y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$
17. $3x^2 + 2y^2 - 6 = 0$
18. $x^2 + 6y = 0$
19. $7x^2 + 16y^2 - 112 = 0$
20. $y^2 - x^2 - 4 = 0$



التكامل المحدد :

تعريف :لتكن f دالة معرفة على الفترة المغلقة [a,b] وليكن p جزء من الفترة [a,b], مجموع ريمان للدالة $f(R_p)$ يعطي بالصيغة :

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} f(w_i) Dx_i$$

حيث w_i بعض الاعداد في الفترة $[x_{i-1},x_i]$ لجميع قيم $i=1,2,3,\dots,n$

تعريف : لتكن f دالة معرفة على الفترة [a,b], التكامل المحدد للدالة f من a الى b يعطى بالصيغة :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{||p||\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(w_i) Dx_i$$

بشرط ان الغاية موجودة.

- مبرهنة القيمة الوسطى : لتكن f دالة معرفة ومستمرة على الفترة [a,b] وقابلة للاشتقاق في الفترة (a,b) فانه يوجد على الاقل عدد واحد ليكن c بحيث $(a<c<b)$ فأن :

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

المبرهنة الاساسية الاولى لحساب التكامل المحدد .

لتكن f دالة معرفة على الفترة [a,b] وكانت f`(x)=f(x) لكل $x \in [a,b]$ فان :

$$\int_a^b f(x)dx = f(b)-f(a)$$

البرهان1: $f(b)-f(a)=f(x_1)-f(x_0)+ f(x_2)-f(x_1)+ \dots +f(x_n)-f(x_{n-1})$ باستخدام مبرهنة القيمة الوسطى

بما ان: $f'(x) = f(x), \forall x \in [a,b]$

1) F دالة مستمرة في [a,b]

2) F دالة قابلة للاشتقاق في (x_{i-1},x_i)

$$f'(wi) = \frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \cdots wi \in (x_{i-1}, x_i)$$

$$f'(wi)(x_i - x_{i-1}) = f(x_i) - f(x_{i-1})$$

$$f(b)-f(a) = f'(w_1)(x_1-x_0) + f'(w_2)(x_2-x_1) + \cdots + f'(w_n)(x_n - x_{n-1})$$

نعوض في 1)

$$= f(w_1)Dx_1 + f(w_2)Dx_2 + \cdots + f(w_n)Dx_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(w_i)Dx_i$$

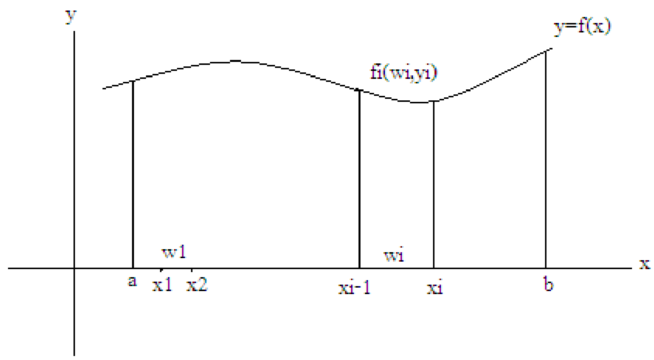
$$when: n \to \infty \therefore \max Dx_i \to 0$$

$$f(b)-f(a) = \int_a^b f(x)dx$$

حساب المساحات بالتكامل

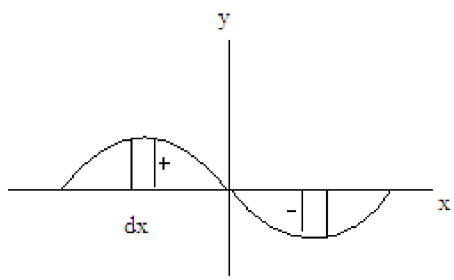
المساحة تحت المنحني $y=f(x)$ من $x=a$ الى $X=b$
تعطى بالصيغة التالية :

$$A=\int_a^b f(x)dx$$

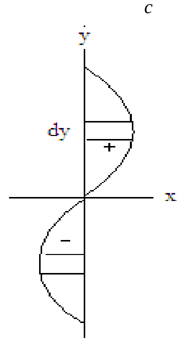


ملاحظة :

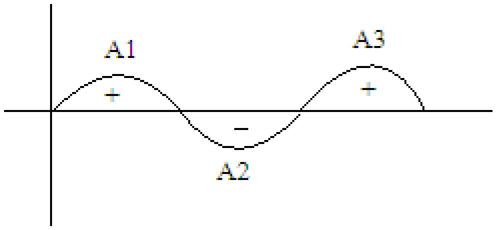
1) اذا كانت $y=f(x)$ دالة مستمرة وموجبة في الحيز $a\le x\le b$ فأن $\int_a^b f(x)dx$ يكون موجب اما اذا كانت سالبة فان التكامل يكون سالب(تحت المحور x)



2) اذا كانت $x=g(y)$ دالة مستمرة وموجبة في الحيز $c \le y \le d$ فان $\int_c^d g(y)dy$ يكون موجب اي يمين المحور (y) اما اذا كانت سالبة فان $\int_c^d g(y)dy$ سالب (يسار المحورy)



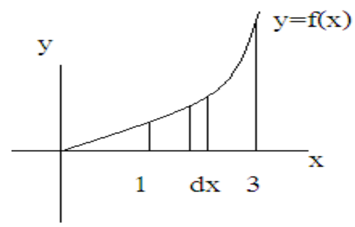
3) اذا كانت $y=f(x)$ تغير اشارتها في الحيز $a\le x\le b$ او اذا كانت $x=g(y)$ تغير اشارتها في الحيز $c\le y\le d$ فان المساحة تحت المنحني سوف تكون مجموع اثنين او اكثر من التكاملات المحددة .



A=A1 + A2 + A3

<u>مثال</u> : اوجد المساحة تحت المنحني $y=x^2$ حيث $1 \le x \le 3$

$$A=\int_1^3 ydx = 1\int_1^3 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^3$$
$$= 9-\frac{1}{3}=\frac{26}{3}$$ وحدةمربعة



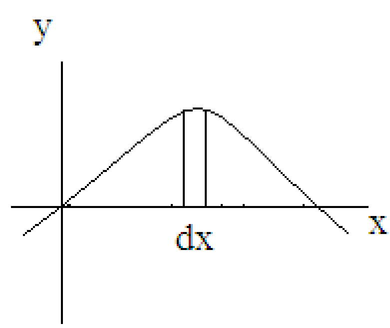
<u>مثال</u> : اوجد المساحة المحددة بين المحور x والمنحني $y=4x-x^2$.

$Y=0 \rightarrow x(x-4)=0 \rightarrow x=0,4$

$-y=x^2-4x+4-4$

$-y+4=(x-2)^2 \rightarrow (x-2)^2=-(y-4)$

$$A=\int_0^4 ydx = \int_0^4 (4x-x^2)dx$$
$$= 2x^2-\frac{x^3}{3}\Big|_0^4=\frac{32}{3}$$ وحدةمربعة

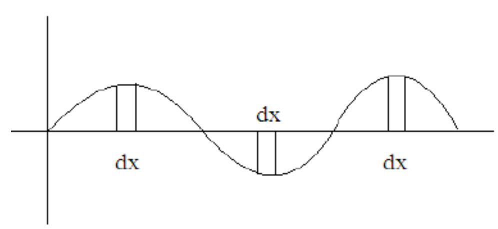


<u>مثال</u> : اوجد المساحة المحددة بين المنحني $y=x^3-6x^2+8x$ والمحور x .

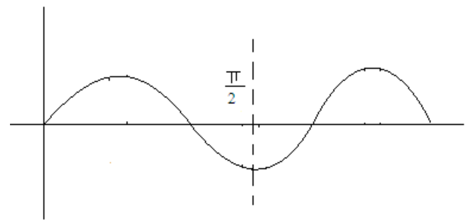
$Y=0 \rightarrow x^3-6x^2+8x=0 \rightarrow x(x^2-6x+8)=0$

$x(x-4)(x-2)=0 \rightarrow x=0,4,2 \quad (0,0),(4,0),(2,0)$

$$A=\int_0^2 ydx+\int_2^4 -ydx=$$
$$\int_0^2 (x^3-6x^2+8x)dx+\int_2^4 -(x^3-6x^2+8x)dx=$$
$$=4+4=8$$ وحدةمربعة



مثال: اوجد المساحة المحددة بـ $y=\sin(x)$, $x=0$, $x=3\pi/2$



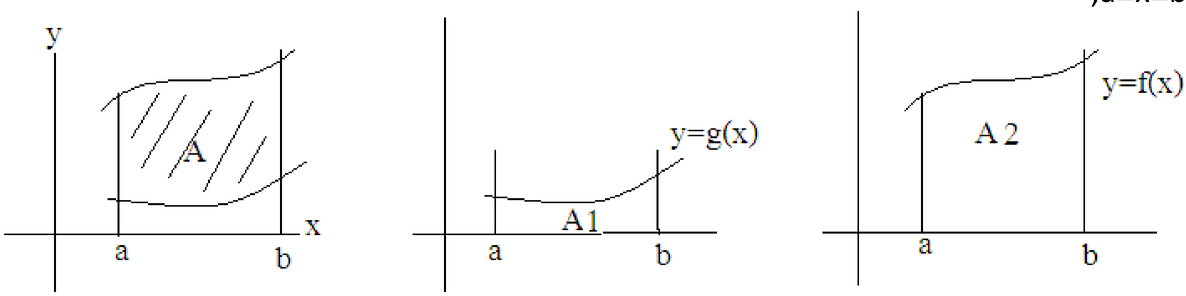
$\sin x=0 \rightarrow x=n\pi$, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$

$$A=\int_0^{\pi}\sin x dx-\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\sin x dx=-\cos x]_0^{\pi}+-\cos x]_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}$$

$= 3$ وحدةمربعة

المساحة بين منحيين :

لنفرض ان f,g هما دالتان مستمرتان ومعرفتان في الحيز $[a,b]$ ولنفرض كذلك ان $f(x) > g(x)$,$a \le x \le b$



فلاستخراج المساحة A المحددة بين منحنيين والمستقيمان $x=a,x=b$ نستخرج المساحة A1 والمساحة A2 والفرق بينهما سيعطي المساحة A.

$$A=A2-A1=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx$$

مثال : اوجد المساحة المحددة بين منحنيي القطع المكافئ $y=-x^2+6x$ و $y=x^2-2x$.

الاول: $-y=x^2-6x=9-9$

$(x-3)^2=-(y-9)$

الراس $(+3,9)$ ونقاط تقاطعه مع المحورين :

$x=0 \rightarrow y=0$

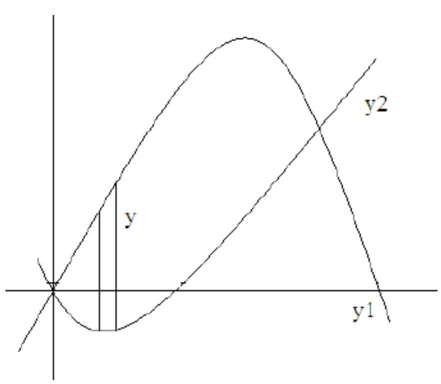
$y=0 \rightarrow x^2-6x=0$

$x(x-6)=0 \rightarrow x=0,6$

الثاني : $y=x^2-2x+1-1 \rightarrow y=(x-1)^2-1$

$(x-1)^2=y+1$

الرأس $(1,-1)$



نقاط تقاطعه مع المحورين $x=0 \rightarrow y=0$

$y=0 \rightarrow x^2-2x=0 \rightarrow (x-2)=0 \rightarrow x=0,2$

نقاط تقاطع القطعين : $y_1=y_2 \leftarrow$ $6x-x^2=x^2-2x$

$2x^2-8x=0 \rightarrow 2x(x-4)=0 \rightarrow (0,0)\ ,(4,8)$

$$A=\int_0^4 (y1-y2)dx \rightarrow \int_0^4 (6x-x^2-x^2+2x)dx$$

$$=\int_0^4 (-2x^2+8x)dx=\frac{64}{3} \text{ وحدةمربعة}$$

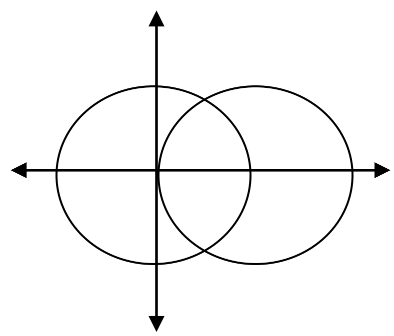
<u>مثال</u> : اوجد مساحة الجزء المشترك بين الدائرتين $x^2+y^2=4x$, $x^2+y^2=4$.

$$x^2-4x+4-4+y^2=0$$

$$(x-2)^2+y^2=4 \Rightarrow x-2=\pm\sqrt{4-y^2}$$

$$x=2\pm\sqrt{4-y^2}$$

نقاط تقاطع الدائرتين: $4x=4$ $4(x-1)=0 \rightarrow x=1 \rightarrow (1,\pm\sqrt{3})$



$$A=2\int_0^{\sqrt{3}} \sin \left\{\sqrt{4-y^2}-(2-\sqrt{4-y^2})\right\}dy$$

$$=4\int_0^{\sqrt{3}} (\sqrt{4-y^2}-1)dy$$

$$=4\int_0^{\sqrt{3}} (\sqrt{4-4\sin^2\theta}-1)(2\cos\theta)d\theta$$

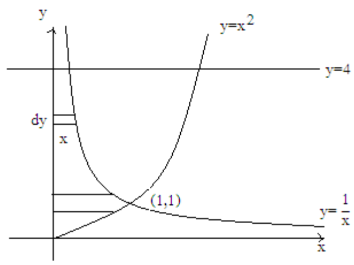
$$=8\int_0^{\sqrt{3}} (2\cos\theta-1)\cos\theta d\theta = 8\int_0^{\sqrt{3}} (2\cos^2\theta-\cos\theta)d\theta$$

$$=8\int_0^{\sqrt{3}} [2\times\frac{(1+\cos 2\theta)}{2}-\cos\theta)\cos\theta]d\theta = 8\left[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}-\sin\theta\right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$=8[\theta+\sin\theta\cos\theta-\sin\theta]=8\left[\sin^{-1}(\frac{y}{2})+\frac{y}{2}(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2})-\frac{y}{2}\right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$=8\left[\sin^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2})+\frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{1}{2})-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]=(\frac{8\pi}{3}-2\sqrt{3}) \text{ وحدةمربعة}$$

مثال 3: جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحني $y=\frac{1}{x}$ والمنحني $y=x^2$ والمستقيم $y=4$ والمحور y .



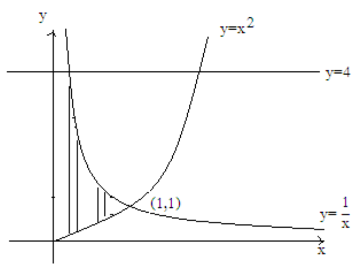
شريحة افقية

$$A_1=\int_0^1 x\,dy=\int_0^1\sqrt{y}\,dy$$

$$=\left.\frac{y^{\frac{3}{2}}}{3/2}\right|_0^1=\frac{2}{3} \text{ ووحدةمربعة}$$

$$A_2=\int_1^4\frac{1}{y}dy=Lny\Big|_1^4=Ln4$$

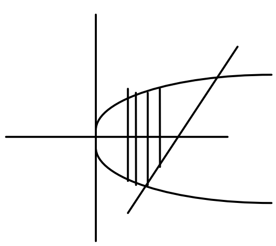
$$A=\frac{2}{3}+Ln4 \text{ وحدةمربعة}$$



شريحة عمودية :

$$A=\int_0^{\frac{1}{4}}(4-x^2)dx+\int_{\frac{1}{4}}^{1}(\frac{1}{x}-x^2)dx=\frac{2}{3}+Ln4 \text{ وحدةمربعة}$$

مثال 4: جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحني $y^2=4x$ والمستقيم $y=2x-4$.



المستقيم $x=\frac{y+4}{2}$ المستقيم

شريحة افقية :

$$A=\int_2^4\left[\left(\frac{y+4}{2}\right)-\frac{y^2}{4}\right]dy=\frac{1}{2}\left[\frac{(y+4)^2}{2}-\frac{y^3}{6}\right]_{-2}^{4}=9 \text{ وحدةمربعة}$$

شريحة عمودية :

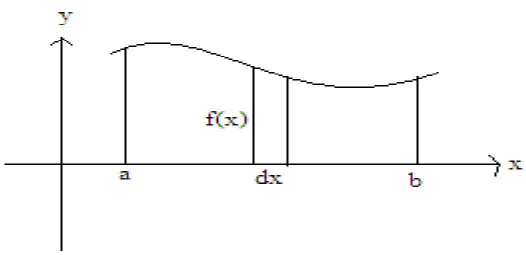
$$A=2\int_0^1 2\sqrt{x}\,dx+\int_1^4(2\sqrt{x}-2x+4)dx=9 \text{ وحدةمربعة}$$

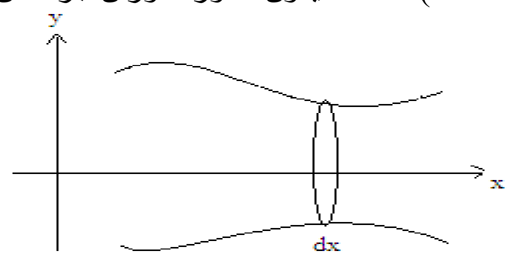
حجوم اجسام دوارنية

تعريف: يتولد الجسم الدوراني عن دوران قطعة سطح مستوية حول مستقيم واقع في مستواها ويمكن ايجاد حجم الجسم الدوراني باستخدام احدى الطريقتين التاليتين :

1. طريقة القرص Disks Method

أ) عندما يكون محور الدوران جزءاً من حدود قطعة السطح





مجموع حجوم الشرائح ينتج لنا الجسم الكلي

لإيجاد الحجم نحتاج الى ايجاد المساحة

مساحة دائرة نصف قطرها $y=f(x)$

حجم القرص =مساحة القاعدة × الارتفاع

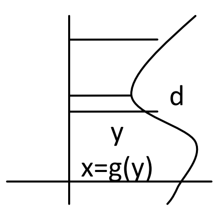
= مساحة الدائرة x الارتفاع

V= $\pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$

1) دوران المساحة حول المحور x "طريقة القرص دائما ناخذ الشريحة عمودية على محور الدوران"

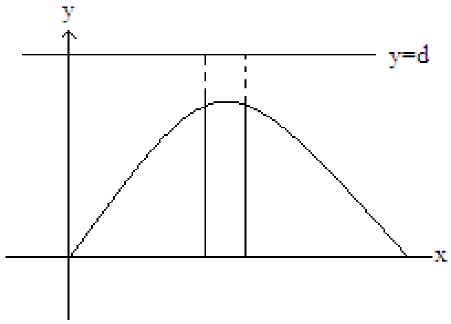
$$V=\pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$$

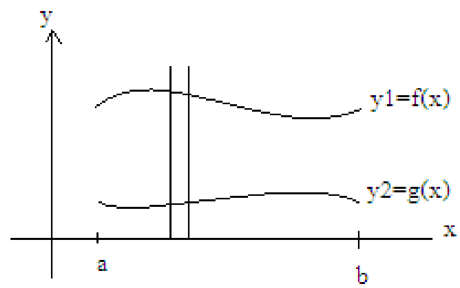
2) دوران المساحة حول المحور y



$$V=\pi\int_c^d (g(y))^2\,dy$$

ب) عندما لا يكون محور الدوران جزءا من حدود السطح :



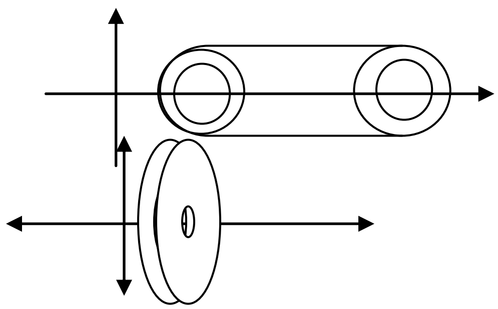


1) حول المحور x

$$V = \pi \int_a^b (y_1^2 - y_2^2)\,dx$$

2) حول المحور y

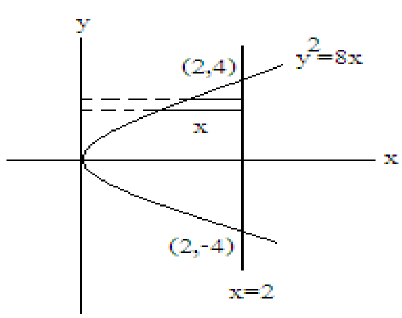
$$V = \pi \int_c^d (x_1^2 - x_2^2)\,dy$$



مثال : اوجد حجم الجسم المتولد من دوران المساحة المحددة بين القطع المكافئ $y^2=8x$ حول المحور y .

نقاط التقاطع $x=2 \rightarrow y^2=16$

$y=\pm 4$

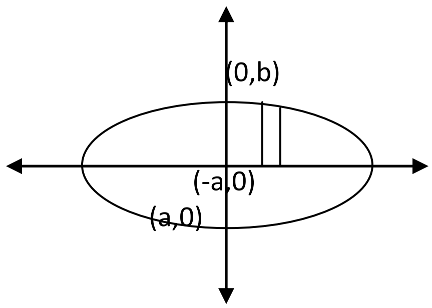


$$V = \pi \int_c^d (x_1^2 - x_2^2)\,dy$$

$$V = \pi \int_{-4}^{4} \left[(2)^2 - \frac{y^4}{64} \right] dy = 2\pi \int_0^4 (4 - \frac{y^2}{64})\,dy$$

$$= 2\pi \left[4y - \frac{y^5}{64} \right]_0^4 = \frac{128}{5}$$ وحدةمكعبة

مثال : اوجد حجم الجسم المتولد من دوران منحني القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ حول المحور x



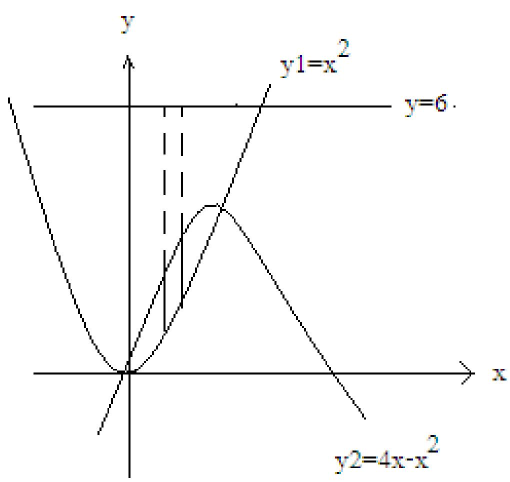
$$V=\pi\int_{-a}^{a} y^2 dx$$

$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}\Rightarrow y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$$

$$V=2\pi\int_0^a \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)dx$$

$$=\frac{2\pi b^2}{a^2}\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^a=2\pi\frac{b^2}{a^2}\left[a^3-\frac{a^3}{3}\right]=\frac{4\pi}{3}b^2a$$

مثال: اوجد حجم الجسم الناتج من دوران المساحة المحددة بين المنحيين $y=4x-x^2$ و $y=x^2$ حول المحور $y=6$.



$-y=x^2-4x+4-4$

$-y=(x-2)^2-4 \longrightarrow (x-2)^2=-(y-4)$

الرأس: (2,4)

نقاط تقاطع المنحنيين : $y_1=y_2$

$x^2=4x-x^2$

$2x^2-4x=0 \longrightarrow x(x-2)=0 \longrightarrow x=0,2$

(0,0) , (2,4)

نقاط التقاطع مع المحور x , $y=0$

$x^2-4x=0 \longrightarrow x(x-4)=0$

$x=0,4$

$$V=\pi\int_0^2[(6-y_1)^2-(6-y_2)^2]dx$$

$$=\pi\int(36-12y_1+y_1^2-36+12y_2+y_2^2)dx$$

$$=\pi\int(-12x^2+x^4+48x-12x^2-16x^2+8x^3-x^4)dx$$

$$=\pi\int[-40x^2+48x+8x^3]dx$$

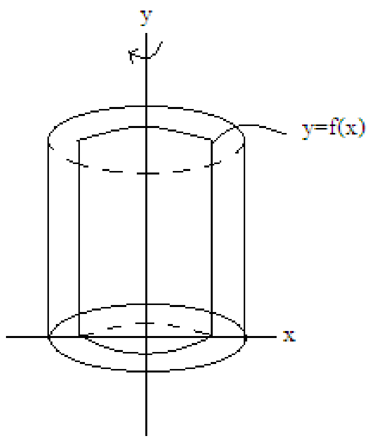
$$=\pi[\frac{-40}{3}x^3+\frac{48}{2}x^2+\frac{8}{4}x^4]_0^2$$

$$=\frac{64}{3}\pi$$ وحدةمربعة

2) طريقة القشرة Shell method

حجم القشرة =المحيط x الارتفاع x السمك = $DX.h.2\pi r$

ان القشرة الاسطوانية هي الحجم المحتوى بين اسطوانتين متمركزتين (أي ذات مركز واحد) حجم الجسم الدوراني ممكن تقريبه لمجموعة من الالقشرة الاسطوانية التي ستنتج من دوران المساحة حول محور الدوران



1) حجم الجسم الناتج عن الدوران حول المحور y:

$$V = 2\pi \int_a^b xF(x)dx$$

2) حجم الجسم الناتج عن الدوران حول المحور x:

$$V = 2\pi \int_c^d yg(y)dy$$

ملاحظة :

1 - ان حجم الجسم المتولد من دوران المساحة المحددة بالمنحنيين $y_1=f_1(x)$ و $y_2=f_2(x)$ في الحيز المحصور بين a,b حول المحور y هو:

$$V = 2\pi \int_a^b x\left[f_1(x) - f_2(x)\right]dx$$

2 - حجم الجسم المتولد من دوران المساحة المحددة بالمنحنيين $x_1=g_1(y)$ و $x_2=g_2(y)$ في الحيز المحدد بين y=c , y=d حول المحور x هو :

$$V = 2\pi \int_a^b y\left[g_1(y) - g_2(y)\right]dy$$

<u>مثال</u> : جد الحجم المتولد من دوران المنطقة المحددة بالمنحني $x=y^2$ والمستقيم $y=x-2$ حول المستقيم $y=-1$.

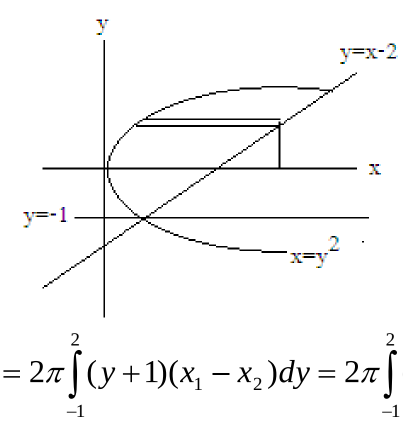
نقاط تقاطع المستقيم مع المنحني :

$y^2=(x-2)^2 \rightarrow y^2=x^2-4x+4$

$y_1{}^2=y_2{}^2 \rightarrow x=x^2-4x+4$

$x^2-5x+4=0 \rightarrow (x-4)(x-1)=0 \rightarrow x=1,4$

(1,-1) ,(4,2)



الشريحة الافقية:

$$V = 2\pi \int_{-1}^{2} (y+1)(x_1 - x_2)dy = 2\pi \int_{-1}^{2} (y+1)(y+2-y^2)dy$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{2} (y^2 + 2y - y^3 + y + 2 - y^2)dy = 2\pi \left[\frac{-y^4}{4} + \frac{3y^2}{2} + 2y\right]_{-1}^{2} = \frac{27\pi}{2}$$ وحدةمكعبة

الشريحة العمودية : $V=V_1+V_2$

$$V_1=\pi\int_0^1((y+1)^2-(1-y)^2)dx$$

$$=\pi\int_0^1(y^2+2y+1-1+2y-y^2)dx$$

$$=\pi\int_0^1 4ydx=\pi\int_0^1 4x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{8\pi}{3}$$ وحدةمكعبة

$$V_2=\pi\int_1^4(y+1)^2-(y+1)^2dx=\pi\int_1^4((\sqrt{x}+1)^2-(x-2+1)^2)dx$$

$$=\pi\int_1^4[x+2\sqrt{x}+1-x^2+2x-1]dx=\pi\left[\frac{3x^2}{2}+\frac{4x^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{x^3}{3}\right]_1^4$$

$$=\pi[24+\frac{32}{3}-\frac{64}{3}-\frac{3}{2}-\frac{4}{3}+\frac{1}{3}]=\frac{65}{6}\pi\cdots\cdots V=\frac{8\pi}{3}+\frac{65\pi}{6}=\frac{27\pi}{2}$$ وحدةمكعبة

مثال : اوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحددة بالمنحني $y=x^2$ والمستقيم $y=4$:

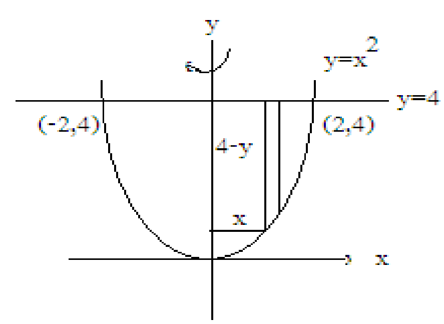
(1)حول المحور y (2) حول المحور $y=4$ (3) حول المحور x (4) حول المستقيم $y=-1$ (5)حول المستقيم $x=2$ بطريقة القشرة .

1) حول المحور y

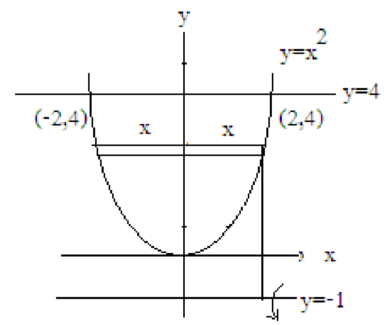
$$V=2\pi\int_0^2 x(4-y)dx$$

$$=2\pi\int_0^2 x(4-x^2)dx=2\pi\left[2x^2-\frac{x^2}{4}\right]_0^2$$

$$=2\pi\left[8-\frac{16}{4}\right]=8\pi$$ وحدةمكعبة



2) حول المحور $y=-1$

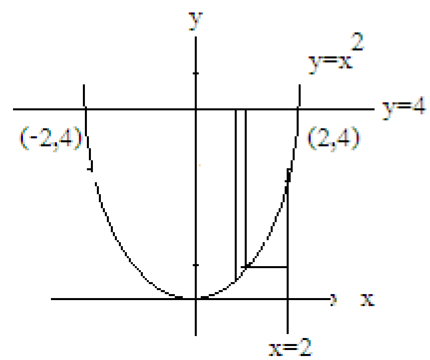


$$V = 2\pi\int_0^4 (y+1)2x\,dy$$

$$V = 4\pi\int_0^4 (y+1)\sqrt{y}\,dy$$

$$= 2\pi\int_0^4 (y^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{1}{2}})dy = 4\pi\left[\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{1088}{15}\pi \text{ وحدةمكعبة}$$

3) حول المستقيم x=2 :



$$V = 2\pi\int_{-2}^{2} (2-x)(4-y)dx$$

$$V = 2\pi\int_{-2}^{2} (2-x)(4-x^2)dx$$

$$= \frac{128\pi}{3} \text{ وحدةمكعبة}$$

4) حول المستقيم x=-2

$$V = 2\pi\int_{-2}^{2} (x+2)(4-y)dx$$

طول المنحني المستوي

*<u>تعريف</u>*1 : اذا كانت f,f\` دالتان مستمرتان في الفترة [a,b] فان طول القوس للمنحني y=f(x) من x=a الى x=b يعطى بالعلاقة :

$$L = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

<u>تعريف</u> 2: اذا كانت g,g\` دالتان مستمرتان في الفترة [c,d] فان طول القوس للمنحني x=g(y) من c الى d يعطى بالعلاقة التالية : $L = \int_c^d \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$

*تعريف*3: اذا كان المنحني معرف بدلالة معادلتين والمعادلات الوسيطية فستكون $y=f(t)$ و $x=g(t)$ فمعادلة طول المنحني يعطى بالعلاقة :

$$L=\int_{t1}^{t2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

مثال 1) اوجد طول قوس المنحني $x=t^2$ و $y=t^3$ من $t=0$ الى $t=4$.

$$L=\int_{t1}^{t2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$\frac{dx}{dt}=2t,\frac{dy}{dt}=3t^2$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=4t^2+9t^4=t^2(4+9t^2)$$

$$L=\int_0^4 t(4+9t^2)^{\frac{1}{2}}dt=\left[\frac{1}{18}\frac{2}{3}(4+9t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4=\frac{8}{27}(37(\sqrt{37}-1))\ \text{وحدة}$$

مثال : اوجد طول قوس المنحني $24xy=x^4+48$ من $x=2$ الى $x=4$:

$$L=\int_2^4\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$24x\frac{dy}{dx}+24y=4x^3\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{4x^3-24y}{24x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^3-6(\frac{x^4+48}{24x})}{6x}=\frac{4x^4-x^4-48}{24x^2}=\frac{3x^4-48}{24x^2}=\frac{x^4-16}{8x^2}$$

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1+\frac{x^8-32x^4+256}{64x^4}=\frac{64x^4+x^8-32x^4+256}{64x^4}$$

$$=\frac{x^8+32x^4+256}{64x^4}=\frac{(x^4+16)^2}{64x^4}$$

$$L=\int_2^4\frac{x^4+16}{8x^2}dx=\int_2^4\left(\frac{x^2}{8}+2x^{-2}\right)dx=\frac{17}{6}\ \text{وحدة}$$

مساحة السطح الدوراني

تعريف : لتكن f و g دالتان مستمرتان موجبتان في الفترة [a,b] و [c,d] على التوالي فان مساحة السطح المتولدة من دوران قوس او جزء من المنحني ..

1) $y=f(x)$ من $x=a$ الى $x=b$ حول المحور x هي :

$$Sx = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,dx$$

2) $x=g(y)$ من $y=c$ الى $y=d$ حول المحور y هي :

$$Sx = 2\pi\int_c^d g(y)\sqrt{1+(\frac{dx}{dy})^2}\,dy$$

اما اذا كان المنحني معرف بدلالة المعادلتين الوسيطيتين $x=x(t)$ و $y=y(t)$ فان مساحة السطح الدوراني بين $t=t_1$ و $t=t_2$ هي :

حول المحور x $$Sx = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

حول المحور y $$Sy = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} x\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

مثال 1: اوجد مساحة السطح الدوراني الناتج عن تدوير قوس المنحني $y=x^2$ بين (0,0) و (2,4) حول المحور y .

$$Sy = 2\pi\int_0^4 x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy \rightarrow y = x^2 \Rightarrow x = y^{\frac{1}{2}}, \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}y^{\frac{-1}{2}}$$

$$= 2\pi\int_0^4 y^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\frac{y^{-1}}{4}}dy$$

$$= 2\pi\int_0^4 y^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{4y+1}{4y}}dy = 2\pi\int_0^4 \frac{y^{1/2}}{2y^{1/2}}(4y+1)^{1/2}dy$$

$$= \frac{2}{4\times 3}\pi[4y+1]^{3/2} = 11.5 \text{ وحدةمربعة}$$

مثال 2) جد المساحة السطحية المتولدة من دوران قوس المنحني $y=a(\theta-\sin\theta), x=a(1-\cos\theta)$ بين $\theta=0$ و $\theta=\pi$ حول المحور y .

$$Sy = 2\pi\int_0^\pi x\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

$$\frac{dx}{d\theta} = a\sin\theta, \frac{dy}{d\theta} a(1-\cos\theta)$$

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = a^2\sin^2\theta + a^2 - 2a^2\cos\theta + a^2\cos^2\theta = 2a^2(1-\cos\theta)$$

$$Sy = 2\pi\int_0^\pi a(1-\cos\theta)\sqrt{2a^2(1-\cos\theta)}\, d\theta$$

$$= 2\pi\int_0^\pi \sqrt{2}a^2 * 2\sin^2\frac{\theta}{2} * \sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2}\, d\theta = 8\pi\int_0^\pi a^2\sin^3\frac{\theta}{2}\, d\theta = 8a^2\pi\int_0^\pi \sin\frac{\theta}{2}(1-\cos\frac{\theta}{2})d\theta$$

$$= 8a^2\pi\int_0^\pi (\sin\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2})d\theta = 8a^2\pi\left[-2\cos\frac{\theta}{2} + \frac{2}{3}\cos^3(\frac{\theta}{2})\right]_0^\pi = 8a^2\pi\left[2-\frac{2}{3}\right] = \frac{32a^2\pi}{3}$$

H.W:

1) احسب مساحة السطح المتولد من دوران المنحني y=Lnx من x=0 الى x=1 حول المحور y : t=0→1 , y=Lnt , x=t

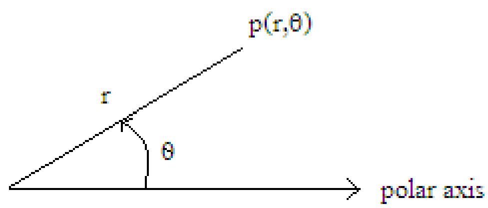
2) اثبت ان طول قوس المنحني $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ هو $4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-e^2\sin^2\theta}\, d\theta$ حيث e هو الاختلاف المركزي للقطع الناقص .

الاحداثيات القطبية : " Polar Coordinate Systems"

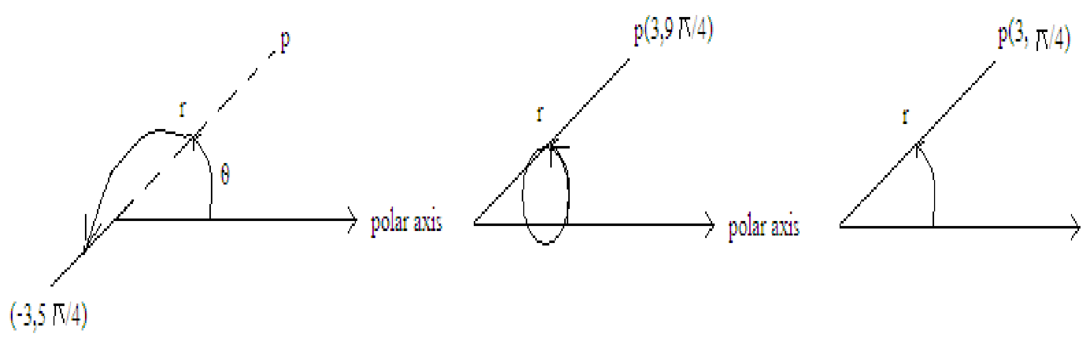
<u>تعريف</u> نظام الاحداثيات القطبية نبدأ باختيار نقطة ثابتة في المستوي ولتكن o (تدعى o نقطة الاصل او القطب pole) ثم نرسم من القطب مستقيم افقي باتجاه اليمين يدعى الاحداثي القطبي (Polar axis) .

تامل اية نقطة في المستوي ولتكن p تختلف عن o وليكن r المسافة من النقطة o الى $p(r>0)$ وθ الزاوية المحصورة بين الاحداثي القطبي والاتجاه الموجب للشعاع op أي عكس حركة عقرب الساعة $(0< \theta <2 \pi)$ كما هو موضح في الشكل . وبذلك تكون θ,r الاحداثيات القطبية للنقطة p ويرمز لها بالرمز $p(r, \theta)$.

ملاحظة :- احداثيات النقطة p غير وحيدة أي ان كل نقطة في المستوي يمكن تعيينها بعدة طرق مختلفة في الاحداثيات القطبية ولتكن احداثيات النقطة p هي $(r, \theta+2n \pi)$ و$(-r, \theta+2n \pi)$



فمثلا : $(3, \pi /4)$ و $(3,9 \pi /4)$ و $(3,-7 \pi /4)$
جميعها تمثل نفس النقطة .

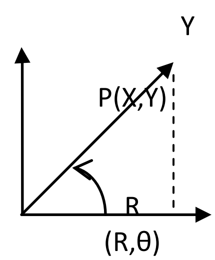


العلاقة بين الاحداثيات القطبية والاحداثيات الديكارتية

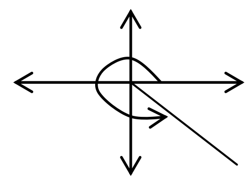
العلاقة بين الاحداثيات الديكارتية (x,y) والقطبية (r,o) للنقطة p تعطى بالشكل التالي :

1) $x= r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$

2) $\theta= \tan^{-1}(y/x)$, $r^2=x^2+y^2$



<u>مثال</u> 1: جد الاحداثيات القطبية للنقطة $(\sqrt{3},-1)$.



$$x=\sqrt{3}, y=-1 \Rightarrow r^2=3+1=4 \Rightarrow r=2$$
$$\theta=\tan^{-1}(\frac{y}{x})=\tan^{-1}(\frac{-1}{\sqrt{3}})$$
$$\theta=\frac{-\pi}{6} \text{ او } \quad \theta=2\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{4\pi}{6}$$

<u>مثال</u> 2: جد الاحداثيات الديكارتية للنقطة (4,-Л/6)

$$x=r\cos\theta=4\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right)=4\cos(2\pi-\frac{\pi}{6})=4\cos\frac{\pi}{6}=2\sqrt{3}$$
$$y=r\sin\theta=4\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)=4\sin(2\pi-\frac{\pi}{6})=-4\sin\frac{\pi}{6}=-2$$

احداثيات النقطة هي : $(2\sqrt{3},-2)$

<u>مثال</u>3 : جد معادلة المنحني r=4sinθ بالصيغة الديكارتية .

$$r^2=4r\sin\theta \Rightarrow x^2+y^2=4y$$
$$x^2+y^2-4y+4-4=0 \rightarrow x^2+(y-2)^2=4$$

دائرة مركزها (0,2) نصف قطرها 2

<u>مثال</u> 4: جد معادلة المنحني $r=\frac{1}{1-\cos\theta}$ بالمستوي xy

$$r-r\cos\theta=1 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}-x=1 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}=x+1$$
$$x^2+y^2=x^2+2x+1 \Rightarrow y^2=2x+1$$

قطع مكافئ

رسم الدوال القطبية

افترض r,θ ترتبط بالمعادلة r=f(θ) . نعرف المحل الهندسي للمعادلة في الاحداثيات القطبية (r,θ) هي مجموعة جميع النقاط p والتي لها زوج مرتب على الاقل في الاحداثيات القطبية (r,θ) والتي تحقق المعادلة المعطاة . ولرسم المحل الهندسي للمعادلة يجب ايجاد جميع الازواج المرتبة (r,θ) والتي تحقق المعادلة .ثم نرسم النقاط التي حصلنا عليها .

التناظر

1) المنحني $r=f(\theta)$ متناظر مع نقطة الاصل (القطب) اذا بدلنا r بـ -r او θ بـ π +θ ولم تتغير المعادلة

2) المنحني $r=f(\theta)$ متناظر مع المحور x (المحور القطبي) اذا بدلنا θ بـ -θ ولم تتغير المعادلة .

3) المنحني $r=f(\theta)$ متناظر مع المحور y (المستقيم $\theta = \frac{\pi}{2}$) اذا بدلنا θ بـ (π-θ) ولم تتغير المعادلة .

ملاحظة :

1 - عند تحقيق شرطين من شروط التناظر على منحني فان الشرط الثالث يتحقق ايضاً .

2 - بعض المنحنيات لها تناظر حول احد المحاور ولكن لا ينطبق عليها أي من شروط التناظر .

مثال : ناقش المنحني r=2+2cosθ مع رسمه.

$$1)\theta \to -\theta$$

$$r = 2+2\cos(-\theta) \Rightarrow r = 2+2\cos\theta$$

المنحني متناظر مع المحور x

$$2)\theta \to \pi - \theta$$

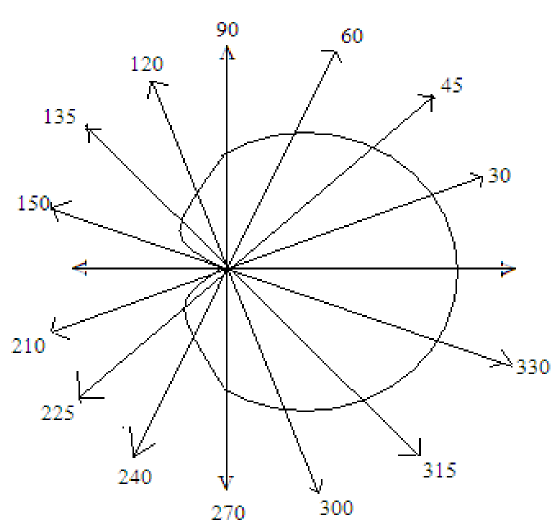
$$r = 2+2\cos(\pi-\theta) = 2-2\cos\theta$$

لا يوجد تناظر مع المحور y

$$3)r \to -r \Rightarrow -r = 2+2\cos\theta$$

لا يوجد تناظر مع نقطة الاصل

θ	0	Л/6	Л/4	Л/3	Л/2	2Л/3	3Л/4	5Л/6	Л
r	4	3.7	3.4	3	2	1	0.58	0.26	0
θ	360	330	315	300	270	240	225	210	

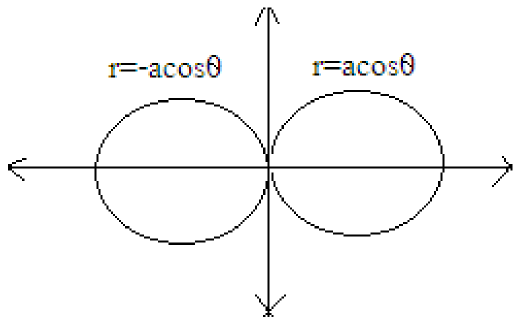


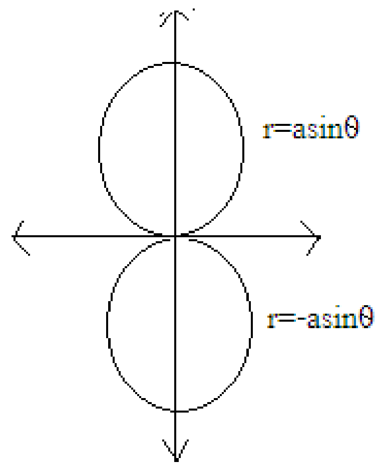
بعض المنحنيات المعروفة

1) المنحني ($r=a$) يمثل دائرة مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها a .

2) المنحني ($r=\pm a\cos\theta$) يمثل دائرة مركزها يقع على المحور x .

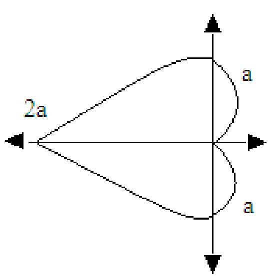
3) المنحني $r=\pm a\sin\theta$ يمثل دائرة مركزها يقع على المحور y .



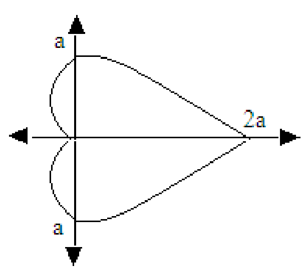


4) المعادلة $r=a\pm b\sin\theta$ و $r=a\pm b\cos\theta$ تمثل :

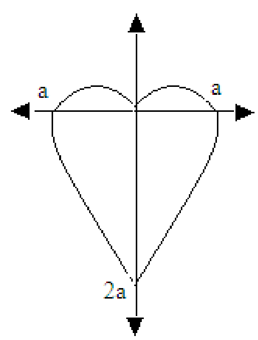
أ) منحني القلب اذا كان $a=b$



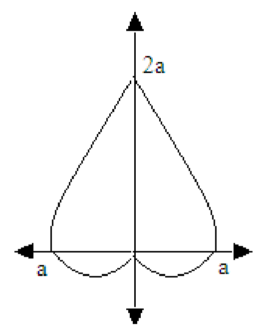
$r=a(1-\cos\theta)$



$r=a(1+\cos\theta)$

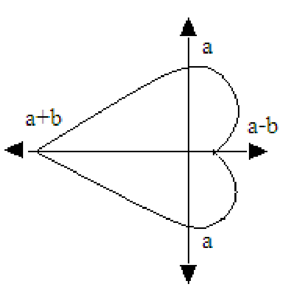


$r=a(1-\sin\theta)$

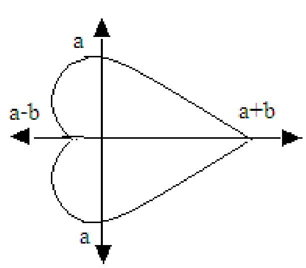


$r=a(1+\sin\theta)$

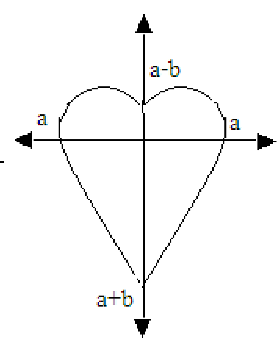
ب) اذا كان $a > b$ فان المنحني يسمى (ليماسون):



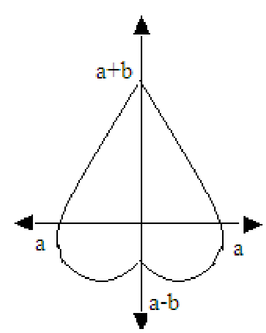
$r=a-b\cos\theta$



$r=a+b\cos\theta$

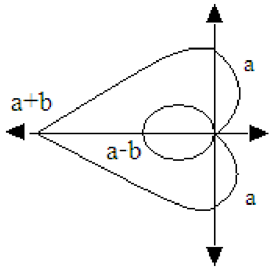


$r=a-b\sin\theta$

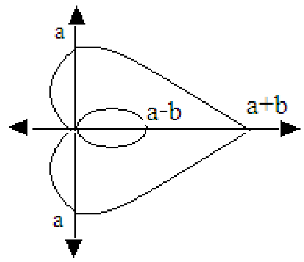


$r=a+b\sin\theta$

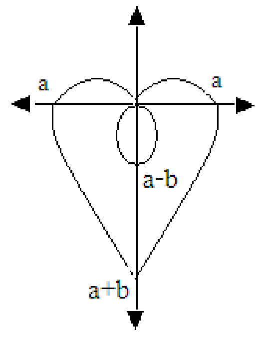
ج) اذا كان $a < b$:



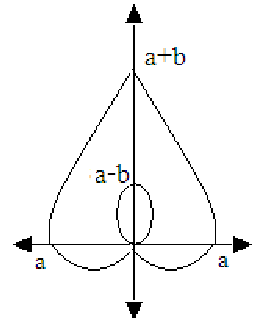
$r = a - b\cos\theta$



$r = a + b\cos\theta$

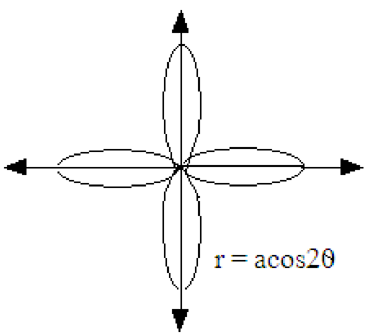


$r = a - b\sin\theta$

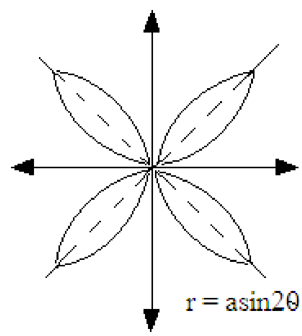


$r = a + b\sin\theta$

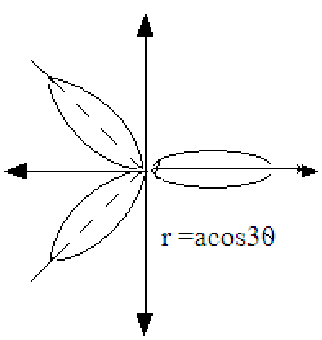
د) معادلة المنحني بالشكل $r = a\sin 2\theta$ او $r = a\cos 2\theta$ تمثل وردة رباعية الوريقات :



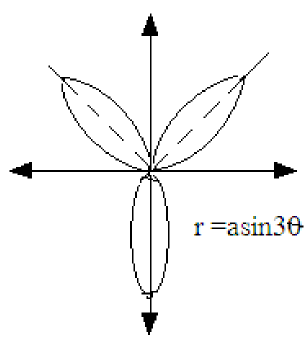
$r = a\cos 2\theta$



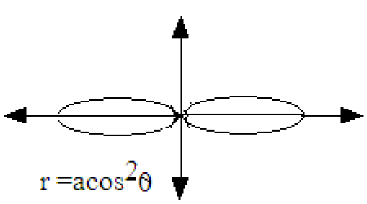
$r = a\sin 2\theta$



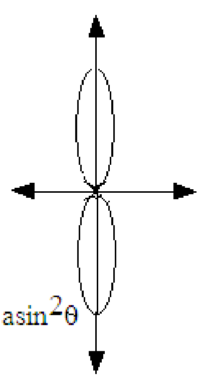
$r = a\cos 3\theta$



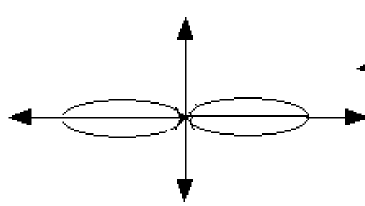
$r = a\sin 3\theta$



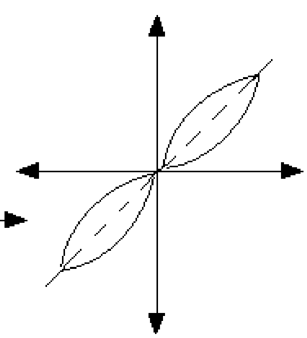
$r = a\cos^2\theta$



$r = a\sin^2\theta$



$r^2 = a^2\cos 2\theta$



$r^2 = a^2 \sin 2\theta$

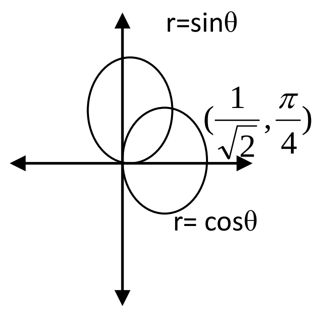
نقاط التقاطع للمنحنيات بالصيغة القطبية :

<u>مثال</u> : جد نقاط التقاطع للمنحنيين $r_1=Sin\theta$ و $r_2=\cos\theta$.

$$r_1 = r_2 \Rightarrow Sin\theta = Cos\theta \Rightarrow \frac{Sin\theta}{Cos\theta} = 1$$

$$\tan\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \text{ او } \theta = 225$$

نقطة التقاطع : $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{4})$

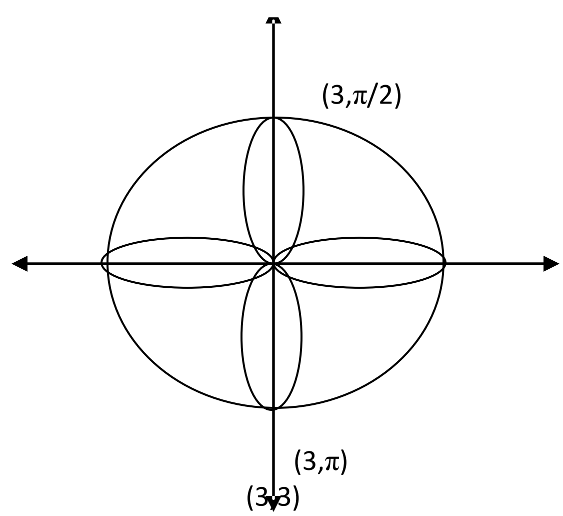


ملاحظة : بصورة عامة لايجاد جميع نقاط التقاطع لمعادلة منحنيين بالصيغة القطبية من الضروري رسم المنحنيين .

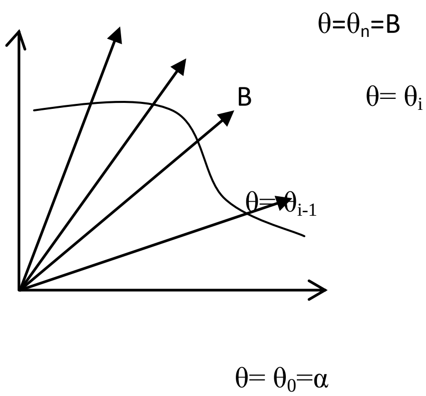
<u>مثال</u> : جد جميع نقاط التقاطع للمنحنيين $r=3$ و $r=3Cos2\theta$

$3=3Cos2\theta \rightarrow Cos2\theta=1 \rightarrow 2\theta=Cos^{-1}(1)$
$2\theta=2n\pi \rightarrow \theta=n\pi \qquad n=0,\pm1,\pm2,\ldots$

$r=-3 \rightarrow Cos2\theta=-1 \rightarrow 2\theta=(2n+1)\pi \rightarrow \theta=(2n+1)\pi/2$

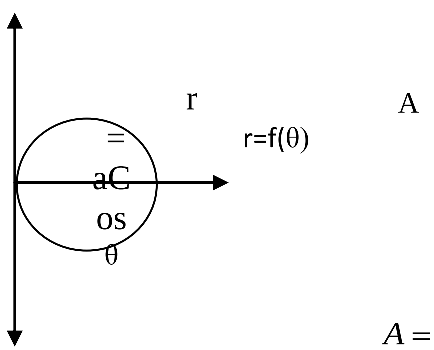


المساحة في الاحداثيات القطبية



تحسب المساحة OAB المحددة بين $\theta=\alpha$
و $B= \theta$ والمنحني $r=f(\theta)$ تقسم الزاوية
OAB الى n من الاجزاء $\alpha=\theta_1<\theta_2<\theta_3<\ldots<\theta_n=B$

$$A=\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left[f(\theta)\right]^2 d\theta$$



مثال 1) اوجد مساحة المنحني $r = a\cos\theta$.

اولاً : نجد حدود التكامل

$r = a \rightarrow \cos\theta=1 \rightarrow \theta=0$

$r=0 \rightarrow \cos\theta=0 \rightarrow \theta=\pi/2 , -\pi/2$

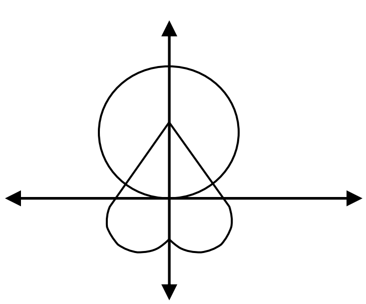
$$A=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}a^2\cos^2\theta d\theta=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1+\cos2\theta}{2}\right]d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\left[\theta+\frac{\sin2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{a^2}{2}\left[\frac{\pi}{2}\right]=\frac{a^2\pi}{4}$$ وحدةمربعة

مثال : جد مساحة المنطقة الواقعة داخل الدائرة $r = 5\sin\theta$ وخارج المنحني $r = 2+\sin\theta$.

$5\sin\theta=2+\sin\theta \rightarrow 4\sin\theta=2$

$\sin\theta=1/2 \rightarrow \theta=\pi/6 \;, \theta=150$

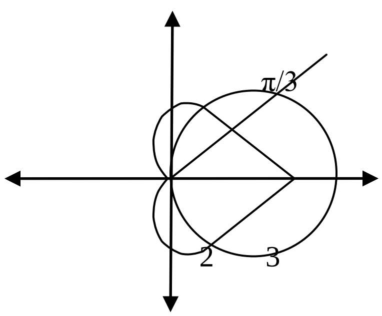


$$A = 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\left\{25Sin^2\theta - (4 + 4Sin\theta + Sin^2\theta)\right\} d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (24\left(\frac{1 - Cos2\theta}{2}\right) - 4 - 4Sin\theta)d\theta$$

$$A = \left[120 - 6Sin2\theta - 40 + 4Cos\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8\pi}{3} + \sqrt{3} \text{ وحدةمربعة}$$

مثال : جد المساحة المشتركة بين المنحنيين $r = 3Cos\theta$ و $r = 1+Cos\theta$.



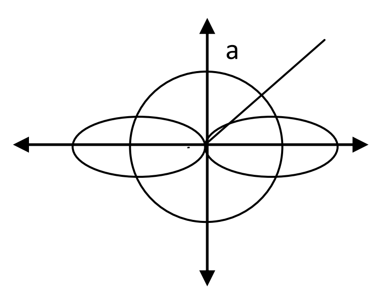
$$A = 2\left[\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/3}(1 + Cos\theta)^2 d\theta + \frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi/2} 9Cos^2 d\theta\right]$$

$$= \int_{0}^{\pi/3}(1 + 2Cos\theta + Cos^2\theta)d\theta + \int_{\pi/3}^{\pi/2} 9(\frac{1 + Cos2\theta}{2})d\theta$$

$$= \theta + 2Sin\theta + \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}Sin2\theta]_{0}^{\pi/3} + 9(\frac{1}{2}\theta + \frac{Sin2\theta}{4}]_{\pi/3}^{\pi/2}$$

$$= \frac{5\pi}{4} \text{ وحدةمربعة}$$

مثال : جد المساحة الواقعة داخل المنحني $r^2 = 2a^2 Cos2\theta$ وخارج المنحني $r = a$.



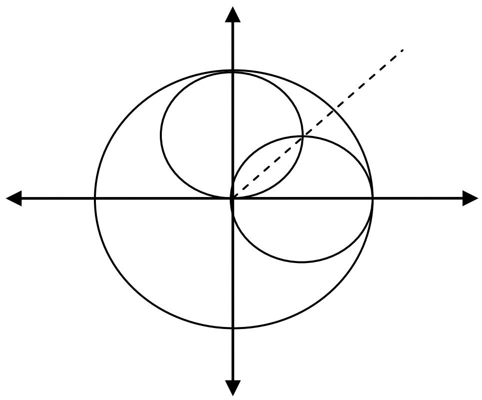
$$r = \sqrt{2}a \Rightarrow \theta = 0$$

$$a^2 = 2a^2Cos2\theta \Rightarrow Cos2\theta = \frac{1}{2}$$

$$2\theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$A = 4\int_{0}^{\pi/6}\frac{1}{2}\left[2a^2Cos2\theta - a^2\right]d\theta = 2a^2\left[Sin2\theta - \theta\right]_{0}^{\pi/6} = 2a^2\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right] = a^2(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}) \text{ وحدةمربعة}$$

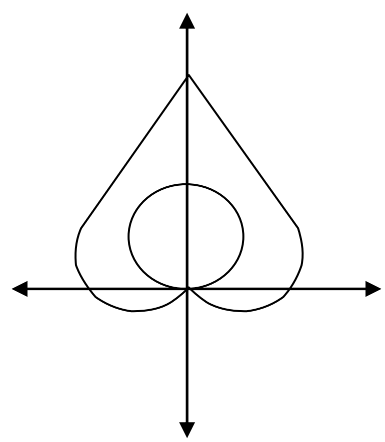
مثال : احسب مساحة المنطقة الواقعة في الربع الاول داخل r=a وخارج الدائرتين r=aSinθ و r =aCosθ.



$$r_1 = r_2$$
$$a = aCos\theta \Rightarrow Cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = 0$$
$$a = aSin\theta \Rightarrow Sin\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$
$$A = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2}\left[a^2 - a^2 Cos^2\theta\right] d\theta$$
$$A = a^2 \int_0^{\pi/4} \left[1 - \frac{1+Cos2\theta}{2}\right] d\theta = \frac{a^2}{2}\left[\theta - \frac{Sin2\theta}{2}\right]_0^{\pi/4}$$
$$A = \frac{a^2}{2}\left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right]$$

مثال : جد مساحة المنطقة الواقعة داخل المنحني (r=a(1+Sinθ وخارج الدائرة r = aSinθ .

$$r = 0 \Rightarrow 1 + Sin\theta = 0, Sin\theta = -1 \Rightarrow \theta = -\pi/2$$
$$A = 2\left[A_1 + A_2\right]$$
$$A_1 = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{0} a^2 (1 + Sin\theta)^2 d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{0} a^2 + 2a^2 Sin\theta + a^2\left(\frac{1-Cos2\theta}{2}\right) d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\left[a^2\theta - 2a^2 Cos\theta + \frac{a^2}{2}\theta - \frac{a^2}{4} Sin2\theta\right]_{-\pi/2}^{0} = \frac{1}{2}\left[\frac{3a^2\pi}{4} - 2a^2\right]$$



$$A_2 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (r_1^2 - r_2^2) d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[a^2(1 + Sin\theta)^2 - a^2 Sin^2\theta\right] d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2 + 2a^2 Sin\theta) d\theta = \frac{1}{2}\left[a^2\theta - 2a^2 Cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left[a^2\frac{\pi}{2} + 2a^2\right]$$
$$A = 2\left[\frac{1}{2}\left(a^2\frac{\pi}{2} + \frac{3a^2\pi}{4} + 2a^2 - 2a^2\right)\right] = \frac{5a^2\pi}{4} \text{ وحدةمربعة}$$

<u>مثال</u> : اوجد المساحة المحددة داخل العقدة الصغيرة للمنحني $r=1+2Cos\theta$.

$r=0 \rightarrow 1+2Cos\theta =0$

$Cos\theta=-1/2 \rightarrow \theta = 120$

$r = -1 \rightarrow -1=1+2Cos\theta$

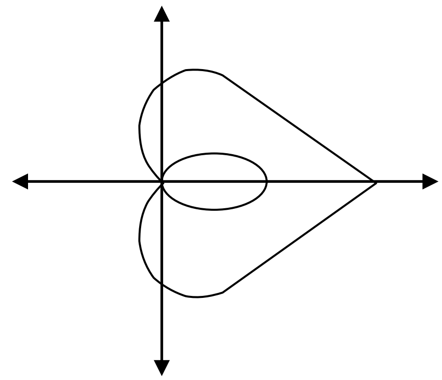
$Cos\theta = -1 \rightarrow \theta=\pi$

$$A = 2\int_{120}^{\pi} \frac{1}{2}[1+2Cos\theta]^2 \, d\theta$$

$$= 2\int_{120}^{\pi} \frac{1}{2}[1+4Cos\theta+4Cos^2\theta] d\theta$$

$$= \int_{120}^{\pi}\left[1+4Cos\theta+4\left(\frac{1+Cos2\theta}{2}\right)\right] d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[2a-3\sqrt{3}\right]$$



اطوال الاقواس ومساحات السطوح الدورانية في الاحداثيات القطبية

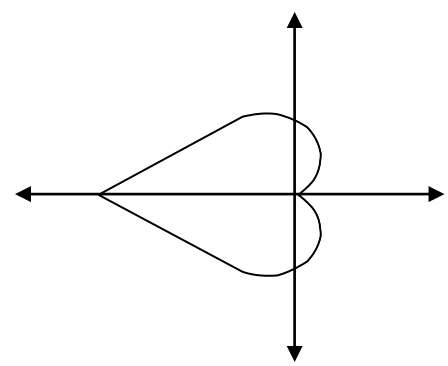
يعطى طول قوس المنحني $r=f(\theta)$ من θ_1 الى θ_2 بالصيغة :

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} \, d\theta$$

اما مساحة السطح الدوراني الناتج من دوران قوس المنحني $r=f(\theta)$ من θ_1 الى θ_2 حول المحور القطبي هي:

$$S = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} rSin\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} \, d\theta$$

مثال : جد طول المنحني الذي معادلته $r=aSin^2(\theta/2)$.



$$r=a\left(\frac{1-Cos\theta}{2}\right)\Rightarrow r=\frac{a}{2}(1-Cos\theta)$$

$$L=2\int_0^{\pi}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

$$r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2=\frac{a^2}{4}(1-Cos\theta)^2+\frac{a^2}{4}Sin^2\theta$$

$$=\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{2}Cos\theta+\frac{a^2}{4}Cos^2\theta+\frac{a^2}{4}Sin^2\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}(1-Cos\theta)$$

$$L=2\int_0^{\pi}\sqrt{\frac{a^2}{2}(1-Cos\theta)}d\theta=2\int_0^{\pi}\sqrt{a^2Sin^2\frac{\theta}{2}}d\theta$$

$$=2\int_0^{\pi}aSin\frac{\theta}{2}d\theta=2a\left(-2Cos\frac{\theta}{2}\right)_0^{\pi}$$

$=4a$ وحدة مربعة

مثال : جد طول قوس المنحني $r= aSin^3(\theta/3)$ من من $\theta=0$ الى $\theta=\pi$.

$$L=\int_0^{\pi}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

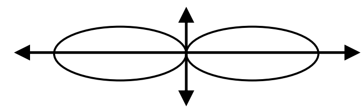
$$r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2=a^2Sin^6\frac{\theta}{3}+(3aSin^2\frac{\theta}{3}Cos\frac{\theta}{3}\times\frac{1}{3})^2$$

$$=a^2Sin^4\frac{\theta}{3}(Sin^2\frac{\theta}{3}+Cos^2\frac{\theta}{3})=a^2Sin^4\frac{\theta}{3}$$

$$L=\int_0^{\pi}\sqrt{a^2Sin^4\frac{\theta}{2}}d\theta=a\int_0^{\pi}Sin^2\frac{\theta}{3}d\theta$$

$$=a\int_0^{\pi}\left(\frac{1-Cos2\frac{\theta}{3}}{2}\right)d\theta=\frac{a}{2}\left[\theta-\frac{3}{2}Sin^2\frac{\theta}{3}\right]_0^{\pi}=\frac{a}{2}\left(\frac{4\pi\pm3\sqrt{3}}{4}\right)$$

مثال : احسب مساحة السطح الناتج من دوران المنحني $r^2=a^2Cos2\theta$ حول المحور القطبي .
المساحة المطلوبة تساوي ضعفي المساحة الناتجة
عن دوران جزء المنحني الواقع في الربع الاول .



$$S = 2\left[2\pi\int_0^{\pi/4} rSin\theta\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta\right]$$

$$2r\frac{dr}{d\theta} = -2a^2Sin2\theta$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{-a^2Sin2\theta}{r},$$

$$r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = a^2Cos2\theta+\frac{a^2Sin^2 2\theta}{r^2}$$

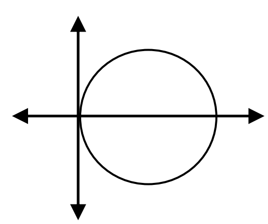
$$= \frac{a^4Cos^2 2\theta + a^4Sin^2 2\theta}{a^2Cos2\theta} = \frac{a^4}{a^2Cos2\theta}$$

$$S = 4\pi\int_0^{\pi/4} a\sqrt{Cos2\theta}\,Sin\theta\sqrt{\frac{a^2}{Cos2\theta}}\,d\theta$$

$$= 4\pi a^2\int_0^{\pi/4} Sin\theta d\theta = 4a^2\pi\left[-Cos\theta\right]_0^{\pi/4} = 4a^2\pi\left[\frac{-1}{\sqrt{2}}+1\right] \text{وحدةمربعة}$$

مثال : احسب المساحة السطحية الناتجة من دوران المنحني $r = 2aCos\theta$ حول المحور القطبي .

$$S = 2\pi\int_0^{\pi/2} rSin\theta\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$



$$r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = 4a^2Cos^2\theta+4a^2Sin^2\theta = 4a^2$$

$$S = 2\pi\int_0^{\pi/2} 2aCos\theta Sin\theta\sqrt{4a^2}\,d\theta = 8a^2\pi\left[\frac{Sin^2}{2}\right]_0^{\pi/2} = 4a^2\pi$$

ملاحظة : حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحددة بالمنحني $r=f(\theta)$ بين $\theta=\theta_1$ و $\theta=\theta_2$ حول المحور القطبي تعطى بالصيغة

$$V=\frac{2}{3}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\pi r^3 Sin\theta d\theta$$

مثال : جد الحجم المتولد من دوران المنحني $r=f(\theta)=1+Cos\theta$ والشعاعين $\theta=0$ و $\theta=\pi$.

$$V=\frac{2}{3}\int_{0}^{\pi}\pi(1+Cos\theta)^3 Sin\theta d\theta$$

$$=\left[\frac{-2\pi}{3}\frac{(1+Cos\theta)^4}{4}\right]_0^{\pi}=\frac{8\pi}{3}\ \text{وحدةمكعبة}$$

المتتابعات والمتسلسلات Sequences and Series

تعريف 1: المتتابعة الغير منتهية (اللانهائية) هي دالة مجالها الاعداد الصحيحة الموجبة ويرمز لحدود المتتابعة بالرمز $\{a_n\}$ أي ان $\{f(n)\}=\{a_n\}$.

مثال : اكتب الحدود الاربعة الاولى للمتتابعة $a_n=\frac{1-n}{n^2}$

$$1)\ a_1=\frac{1-1}{1^2}=0,\ a_2=\frac{1-2}{2^2}=\frac{-1}{4},\ a_3=\frac{1-3}{3^2}=\frac{-2}{9},\ a_4=\frac{-3}{16}$$

$$\{a_n\}=\left\{0,\frac{-1}{4},\frac{-2}{9},\frac{-3}{16},\ldots,\frac{1-n}{n^2},\ldots\right\}$$

$$2)\ a_n=3\rightarrow\{a_n\}=\{3,3,3,\cdots\}$$

مثال : جد الحد النوني (الحد العام) للمتتابعة

1) $\{-1,1,-1,1,-1,1,\ldots\}\rightarrow a_n=(-1)^n$

2) $\left\{1,\frac{2}{3},\frac{3}{5},\frac{4}{7},\frac{5}{9},\cdots\right\}\rightarrow a_n=\frac{n}{2n-1}$

*تعريف*2 : للمتابعة $\{a_n\}$ غاية L وتكتب $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ اذا كان لكل $\epsilon>0$ يوجد عدد صحيح $N>0$ بحيث $|a_n-L|<\epsilon$ عندما $n<N$.

*تعريف*3 : اذا كانت للمتتابعة $\{a_n\}$ غاية منتهية ,عندئذ يقال للمتتابعة بانها متقاربة وغير ذلك فهي متباعدة .

ملاحظة :

$$\lim_{n\to\infty} r^n = 0, |r|<1$$
$$\lim_{n\to\infty} r^n = \infty, |r|>1$$

مثال : المتتابعة $\left\{\frac{1}{2^2}\right\}$ متقاربة ..حيث :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

ملاحظة : لتكن $\{a_n\}$ متتابعة واذا كان $\lim_{n\to\infty} |n|=0$ فان $\lim_{n\to\infty} a_n=0$

مثال : اختبر تقارب المتتابعات التالية :

1.
$$\left\{\frac{n^2-n}{2n^2+n}\right\}$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n}{2n^2+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \text{ متقاربة}$$

2.
$$\left\{\frac{3^n}{n^3}\right\}$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n^3} = \frac{\infty}{\infty} \text{ لوبيتال} \qquad \to = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n Ln3}{3n^2}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3^n (Ln3)^2}{6n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n (Ln3)^3}{6} = \frac{(Ln3)^3}{6} \lim_{n\to\infty} 3^n = \infty \text{ متباعدة}$$

3. $\left\{\left[1+\frac{\alpha}{n}\right]^{n}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{\alpha}{n}\right]^{n}, 1^{\infty}, 0^{\infty}, \infty^{0}, 0^{0}, \infty..0$ صيغ غير محددة

$$a_n = \left[1+\frac{\alpha}{n}\right]^{n} \Rightarrow Lna_n = nLn(1+\frac{\alpha}{n})$$

$$\lim_{n\to\infty} Lna_n = \lim_{n\to\infty} nLn(1+\frac{\alpha}{n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{Ln(1+\frac{\alpha}{n})}{1/n} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{\alpha}{n}} \bullet \frac{-\alpha}{n^2}}{-1/n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha}{1+\frac{\alpha}{n}} = \alpha = \lim_{n\to\infty} Lna_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = e^{\alpha}$$

المتتابعة $\left[1+\frac{\alpha}{n}\right]^{n}$ متقاربة .

المتسلسلات اللانهائية Infinite Series:

تعريف 1:لتكن $\{a_n\}$ متتابعة لانهائية .التعبير الذي يكون بالصيغة التالية $a_1+ a_2 + a_3+ . . .+a_n+. . .$ يسمى متسلسلة لانهائية .

وتكتب برمز المجموع $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ حيث a_i تسمى حدود المتسلسلة , a_n تسمى الحد النوني .

تعريف 2:

أ - المجموع الجزئي النوني S_n للمتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ هو :

$$S_n= a_1 + a_2 + a_3+ . . .+a_n$$

ب - متتابعة المجاميع الجزئية المرافقة للمتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ هي $S_1 ,S_2 , . . . , S_n , . . .$

وتكتب $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$

$S_1= a_1$

$S_2= a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$S_n = a_1 + a_2 + . . . + a_n$

تعريف 3:

المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مع متتابعة المجاميع الجزئية $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ تكون متقاربة اذا كان $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ لبعض الاعداد الحقيقية S . وتكون المتسلسلة متباعدة اذا كانت الغاية غير موجودة .

اذا كان $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة لا نهائية متقاربة و $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ فان S يسمى مجموع المتسلسلة . اما اذا كانت المتسلسلة متباعدة فلا يوجد لها مجموع .

مثال 1) برهن على ان المتسلسلة اللانهائية $\cdots + \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$ متقاربة ثم جد مجموعها.

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}$$

$$A+B=0 \Rightarrow B=-1, A=1$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$S_n = a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$S_n = 1-\frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+1/n} = 1$$

المتسلسلة متقاربة ومجموعها يساوي 1

تعريف : المتسلسلة $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots$ حيث a ,r عدد حقيقي و $a\neq 0$ تسمى متسلسلة هندسية لا نهائية .

نظرية : لتكن $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots$ و $a\neq 0$ متسلسلة هندسية لانهائية فان :

1) المتسلسلة متقاربة وتمتلك المجموع $S=\frac{a}{1-r}$ اذا كان $|r|<1$.

2) المتسلسلة متباعدة اذا كان $|r| \geq 1$.

البرهان :

اذا كان $r=1$ فان $S_n= a + a + a + \ldots + a = na$

المتسلسلة متباعدة $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} na = \infty$

اذا كان $r\neq 1$

$S_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}$

$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 \ldots + ar^n$

$(1-r)\,S_n = a - ar^n$

$$S_n = \frac{a - ar^n}{1-r} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{1-r} - \lim_{n\to\infty} \frac{ar^n}{1-r}$$

$$= \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r} \lim_{n\to\infty} r^n$$

اذا كان $|r|<1$ فان $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ ويكون $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r}$

اذا كان $|r|>1$ فانه $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$ غير موجودة وبالتالي $\lim_{n\to\infty} S_n$ غير موجودة والمتسلسلة متباعدة .

مثال : بين فيما اذا كانت المتسلسلة $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{2}{3^{n-1}} + \cdots$ متقاربة ام متباعدة ؟

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}}$ متسلسلة هندسية لا نهائية اساسها $r=1/3$ و $a=2$ ← $|r|<1$

$$S = \frac{2}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{2/3} = 3$$

ملاحظة :

1) اذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة فان $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (العكس غير صحيحي دائماً).

2) اذا كانت $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ فان المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة .

مثال :

$$a_n = \frac{n}{2n+1} \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \neq 0$$

المتسلسلة متباعدة

3) ليكن c ثابت ,افترض ان المتسلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربتين مع مجموعهما A و B على التوالي فان $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$, و $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ متقاربة ايضاً و :

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)+\sum_{n=1}^{\infty}(b_n)=A+B$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}ca_n=c\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)=cA$$

<u>*مثال*</u> : برهن ان المتسلسلة متقاربة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{n(n+1)}+\frac{2}{3^{n-1}}\right)$

$$=7\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^{n-1}}$$

المتسلسلة الاولى $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ من ال<u>*مثال*</u> الاول متقاربة ومجموعها يساوي 1 (S=1)

اما المتسلسلة الثانية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^{n-1}}$ هندسية لانهائية اساسها 1/3 وهي متقاربة ومجموعها S=3.

$$\therefore 7\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^{n-1}}=7(1)+3=10$$

4) اذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ متقاربة والمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ متباعدة فان $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ تكون متباعدة

.

المتسلسلة التوافقية : هي متسلسلة لانهائية متباعدة وتعرف بالشكل التالي :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

<u>*مثال*</u> : حدد فيما اذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5^n}+\frac{1}{n}\right)$ متقاربة ام متباعدة ؟

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5^n}+\frac{1}{n}\right)$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5^n}\right)$ هندسية اساسها 1/5

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$ توافقية متباعدة $\longrightarrow$ المتسلسلة اعلاه متباعدة

مثال :

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} 3^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{2^n}$$

متتابعة هندسية اساسها 3/2 >1 وهي متباعدة .

اختبار تقارب المتسلسلات اللانهائية ذات الحدود الموجبة

1) اختبار المقارنة :لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متسلسلات موجبة .

أ - المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون متقاربة اذا وجدت متسلسلة متقاربة اخرى $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ بحيث $a_n \le b_n$ لجميع قيم n .

ب - المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة اذا وجدت متسلسلة متباعدة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ بحيث $a_n \ge b_n$ لجميع قيم n .

مثال : بين فيما اذا كانت المتسلسلات التالية متقاربة .

1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+5^n}$$

$$\forall n \ge 1 \Rightarrow \frac{1}{2+5^n} < \frac{1}{5^n} = \left(\frac{1}{5^n}\right)^n$$

المتسلسلة $\sum(1/5)^n$ متقاربة (هندسية أساسها 1/5)

المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+5^n}$ متقاربة

2)

$$\sum_{n\to 1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n}-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}-1} > \frac{1}{\sqrt{n}} \to \frac{3}{\sqrt{n}-1} > \frac{3}{\sqrt{n}}$$

المتسلسلة $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum$ متباعدة (اختبار القوى) $\leftarrow$ $\sum_{n\to 1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n}-1}$ متباعدة

3) $\sum_{n\to1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} \to \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$

$\sum_{n\to1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة (توافقية) $\sum_{n\to1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ متباعدة

2) اختبار التكامل :

لتكن f دالة موجبة القيم , مستمرة ومتناقصة لقيم $x \geq 1$ ولتكن $a_n=f(n)$ لكل $n \geq 1$, n عدد صحيح

فان المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:

أ - متقاربة اذا كان $\int_1^{\infty} f(x)dx$ متقارب .

ب -متباعدة اذا كان $\int_1^{\infty} f(x)dx$ متباعد .

مثال : اختبر تقارب او تباعد المتسلسلات التالية :

1- $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{nLnn} \to a_n = \frac{1}{nLnn} \to f(x) = \frac{1}{xLnx}$

$$\int_2^{\infty} f(x)dx = \int_2^{\infty}\frac{1}{xLnx}dx = \lim_{t\to\infty}\int_2^{t}\frac{1}{xLnx}dx$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left[Ln(Lnx)\right]_2^t = \lim_{t\to\infty}\left[Ln(Lnt) - Ln(Ln2)\right] = \infty$$

المتسلسلة متباعدة

2- $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2} \to a_n = ne^{-n^2}, f(n) = xe^{-x^2}$

$$\int_1^{\infty} xe^{-x^2}dx = \lim_{n\to\infty}\int_1^{t} xe^{-x^2}dx\frac{-2}{-2} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{-1}{2}e^{-x^2}\right]_1^t$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\left[e^{-t^2} - e^{-1}\right] = \frac{-1}{2}(-e^{-1}) = \frac{1}{2e}$$

المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$ متقاربة .

3- $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n} \rightarrow a_n = ne^{-n}, f(x) = xe^{-x}$

$$\int_1^{\infty} xe^{-x} dx = \underset{t\to\infty}{Lim} \int_1^{t} xe^{-x}\ dx = \underset{t\to\infty}{Lim}$$

$$= \frac{1}{2} \underset{t\to\infty}{Lim} \left[e^{-t^2} - e^{-1} \right] = \frac{-1}{2}(-e^{-1}) = \frac{1}{2e}$$

3) اختبار القوى :

تعريف : لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ متسلسلة لا نهائية تدعى هذه المتسلسلة متسلسلة القوى p.

اختبار متسلسلة القوى : متسلسلة القوى p تكون متقاربة اذا كانت p>1 ومتباعدة اذا كان $p \le 1$.

مثال : بين فيما اذا كانت المتسلسلة متقاربة

1-

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+2}, n^3 + 2 > n^3 \Rightarrow \frac{1}{n^3+2} < \frac{1}{n^3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ متقاربة (p=3) ← $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+2}$ متقاربة بالمقارنة

2- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}} \rightarrow p = \frac{2}{3} < 1 \rightarrow$ متباعدة

4) اختبار النسبة : لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ موجبة و $\underset{n\to\infty}{Lim} \frac{a_n + 1}{a_n} = L$:

أ - اذا كان L < 1 المتسلسلة متقاربة

ب - اذا كان L > 1 المتسلسلة متباعدة

ت - اذا كان L=1 الاختبار فاشل (نستخدم اختبار آخر)

مثال :

1-

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!3^n}{(10)^n}, a_n = \frac{n!3^n}{(10)^n}, a_{n+1} = \frac{(n+1)!3^{n+1}}{(10)^{n+1}}$$

$$\underset{n\to\infty}{Lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \underset{n\to\infty}{Lim} \left[\frac{(n+1)!3^{n+1}}{(10)^{n+1}} * \frac{(10)^n}{n!3^n} \right] = \underset{n\to\infty}{Lim} \left[\frac{(n+1)!3^n * 3}{(10)^n * 10} * \frac{(10)^n}{n!3^n} \right]$$

$$= \frac{3}{10} \underset{n\to\infty}{Lim}\, n + 1 = \infty \text{ متباعدة}$$

2- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ $\quad a_n=\frac{n!}{n^n}, a_{n+1}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}*\frac{n^n}{n!}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)n!n^n}{(n+1)(n+1)^n n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{1+n})^n=\frac{1}{e}<1\rightarrow \text{متقاربة}$$

5) اختبار الجذر :

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ متسلسلة لانهائية موجبة الحدود و $\lim_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}}=L$ او $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L$ فان :

أ - اذا كان L<1 فالمتسلسلة متقاربة .

ب - اذا كان L>1 فالمتسلسلة متباعدة

ت - اذا كان L=1 الاختبار فاشل .

<u>مثال</u> : اختبر المتسلسلة : $\sum\left(\frac{n}{2n+3}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}}=L$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n}{2n+3}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+3}=\frac{1}{2}<1\rightarrow \text{متقاربة}$$

مثال :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^5}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^n}{n^5}\right)^{\frac{1}{n}}=3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{5/n}}$$

$$y=\frac{1}{n^{5/n}}\Rightarrow Lny=Ln(\frac{1}{n})^{5/n}$$

$$\lim_{n\to\infty}Lny=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n}Ln\frac{1}{n}=5\lim_{n\to\infty}\frac{Ln\frac{1}{n}}{n}$$

$$=5\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[Ln1-Lnn\right]=5\lim_{n\to\infty}\frac{-Lnn}{n}=5\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{-1}{n}}{n}=0$$

$$\therefore y=e^0=1\Rightarrow 5\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{5/n}}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}}=3>1 \text{ متباعدة}$$

المتسلسلات المتناوبة :

تعريف : كل متسلسلة بالصيغة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ تدعى بالمتسلسلة المتناوبة .

المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$ متناوبة .

اختبار تقارب المتسلسلات المتناوبة :

اذا كان $a_{n+1}\leq a_n$ (متناقصة)لكل قيم $n\geq 1$ و $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=0$ فان المتسلسلة المتناوبة متقاربة .

مثال : اختبر تقارب المتسلسلات التالية :

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ $\qquad a_n=\frac{1}{n}, a_{n+1}=\frac{1}{n+1}$

$$\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}\ \forall n\geq 1$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0 \text{ متقاربة}$$

2)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(\frac{n+1}{n^2+1}),\ \frac{a_{n+1}}{a_n}\le 1?,\ a_n=\frac{n+1}{n^2+1}, a_{n+1}=\frac{n+2}{n^2+2n+2}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+2}{n^2+2n+2}*\frac{n^2+1}{n+1}=\frac{n^3+2n^2+n+2}{n^3+2n^2+4n+2}$$

$$=\frac{n^3+2n^2+n+2}{(n^3+2n^2+n+2)+n^2+3}<1 \qquad \therefore a_{n+1}<a_n$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n^2+1})=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=0$$

المتسلسلة متقاربة .

3)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2n}{4n^2-3} \qquad ,a_n=\frac{2n}{4n^2-3} \quad , \quad a_{n+1}=\frac{2n+2}{4(n+1)^2-3}$$

$$a_n-a_{n+1}\ge 0?$$

$$a_n-a_{n+1}=\frac{2n}{4n^2-3}-\frac{2n+2}{4(n+1)^2-3}=\frac{8n^3+16n^2+2n-(2n+2)(4n^2-3)}{(4n^2-3)(4n^2+8n+1)}$$

$$=\frac{8n^3+16n^2+2n-8n^3+6n^2+8n^3+6n^2-8n^2+6}{(4n^2-3)(4n^2+8n+1)}$$

$$=\frac{8n^2+8n+16}{(4n^2-3)(4n^2+8n+1)} \qquad \to a_n\ge a_{n+1}\to \text{متقاربة}$$

4.

$$\sum(-1)^{n-1}\frac{2n}{4n-3} \qquad ,a_n-a_{n+1}\ge 0(H.W)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{4n-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{4-\frac{3}{n}}=\frac{1}{2}\ne 0 \qquad \to \text{متباعدة}$$

<u>*تعريف*</u> : المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n\to 1}^{\infty} a_n$ متقاربة مطلقا اذا كانت $\sum_{n\to 1}^{\infty}|a_n|$ متقاربة .

<u>*مثال*</u> : اختبر تقارب المتسلسلات التالية :

1) $\sum_{n\to 1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{3^n}$

$$\sum_{n\to 1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{2^n}{3^n}\right|=\sum_{n\to 1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad , \quad r=\frac{2}{3}<1\to \text{متسلسلة هندسية متقاربة}$$

اذن المتسلسلة $\sum_{n\to1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{3^n}$ متقاربة مطلقاً

2)

$$\sum_{n\to1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$$

$$\sum_{n\to1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{1}{n^2}\right|=\sum_{n\to1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

متقاربة اختبار القوى
اذن المتسلسلة متقاربة مطلقاً

3) $$\sum_{n\to1}^{\infty}\frac{(-2)^{n+1}}{n+5^n}$$

$$\sum_{n\to1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n\to1}^{\infty}\frac{(2)^{n+1}}{n+5^n} \qquad , \quad a_n=\frac{(2)^{n+1}}{n+5^n} \quad , \; a_{n+1}=\frac{(2)^{n+2}}{n+1+5^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2)^{n+2}}{n+1+5^{n+1}}*\frac{n+5^n}{(2)^{n+1}}=2\lim_{n\to\infty}\frac{n+5^n}{n+1+5^{n+1}}$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\frac{n+5^n\,Ln5}{1+5^{n+1}\,Ln5}=2\lim_{n\to\infty}\frac{5^n\left(\frac{1}{5^n}+Ln5\right)}{5^n\left(\frac{1}{5^{-n}}+5Ln5\right)}$$

$$=2\frac{Ln5}{5Ln5}=\frac{2}{5}<1$$

المتسلسلة متقاربة $\leftarrow$ متقاربة مطلقاً

4) $$\sum_{n\to1}^{\infty}\frac{2-n}{n^3}$$

$$\sum_{n\to1}^{\infty}\frac{2}{n^3}+\sum_{n\to1}^{\infty}\frac{-n}{n^3}$$

$$\sum_{n\to1}^{\infty}\left|\frac{2}{n^3}\right|=\sum_{n\to1}^{\infty}\frac{2}{n^3}$$

p=3 متقاربة

$$\sum_{n\to1}^{\infty}\left|\frac{-1}{n^2}\right|=\sum_{n\to1}^{\infty}\frac{-1}{n^2} \qquad , \qquad P=2 \text{ متقاربة}$$

$$\therefore\sum\left|\frac{2}{n^3}\right|+\sum\left|\frac{-1}{n2}\right| \quad \text{متقاربة} \qquad \Rightarrow \quad \sum\frac{2-n}{n^3}$$ متقاربة مطلقاً

مبرهنة : كل متسلسلة متقاربة مطلقاً تكون متقاربة والعكس غير صحيح دائماً .

مثال :المتسلسلة $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ متقاربة لكنها ليست متقاربة مطلقاً

$a_n = \frac{1}{n} \quad , a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \quad \rightarrow$ *متناوبة*

$a_{n+1} < a_n \quad , \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \rightarrow$ *متباعدة*

$\sum \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum \frac{1}{n}$ توافقية متباعدة

المتسلسلة ليست متقاربة مطلقاً

تعريف : المتسلسلة اللانهائية $\sum a_n$ متقاربة شرطياً اذا كانت $\sum a_n$ متقاربة و $\sum |a_n|$ متباعدة.
المتسلسلة اللانهائية متقاربة شرطياً اذا كانت متقاربة وغير متقاربة مطلقاً .

مثال : هل المتسلسلات التالية متقاربة شرطياً .

1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{Lnn^3} \quad , \quad a_n = \frac{1}{Lnn^3} \quad , \quad a_{n+1} = \frac{1}{Ln(n+1)^3}$

$\therefore a_{n+1} < a_n$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{Lnn^3} = 0 \quad \rightarrow$ *متقاربة*

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{Lnn^3}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{3Lnn}{3Lnn+1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$

$3Lnn < 3n$

$\frac{1}{3Lnn} > \frac{1}{n} \quad \rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3Lnn} > \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3n} \quad \rightarrow \frac{1}{3} \sum \frac{1}{n}$ *متباعدة*

المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3Lnn}$ متباعدة (اختبار المقارنة)

المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{Lnn^3}$ متقاربة شرطياً

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3+n}{5+n}$

$=\frac{4}{6}-\frac{5}{7}+\frac{6}{8}-\cdots$ *متناوبة*

$a_{n+1} > a_n$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{3+n}{5+n} = 1 \quad \Rightarrow$ *متباعدة*

3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1+n}{n^2} \quad \rightarrow$ *متناوبة*

$a_n = \frac{1+n}{n^2} \quad , \quad a_{n+1} = \frac{2+n}{(n+1)^2} \quad \Rightarrow a_{n+1} < a_n$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+1}{1} = 0 \quad \Rightarrow$ *متقاربة*

هل المتسلسلة متقاربة شرطياً(اختبار التكامل) (متقاربة شرطياً)

مبرهنة : لتكن $\sum a_n$ متسلسلة لانهائية بحيث $a_n \neq 0$ و $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$ فان :

1) اذا كان L<1 فان المتسلسلة متقاربة مطلقاً .
2) اذا كان L>1 فالمتسلسلة متباعدة .
3) اذا كان L=1 فالاختبار فاشل.

<u>مثال</u> : هل المتسلسلة متقاربة مطلقاً .

1) $\sum(-1)^n\frac{3^n}{n!}$

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}n!}{(n+1)!3^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+1} = 0 < 1$

المتسلسلة متقاربة مطلقاً

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2}$

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}n^2}{(n+1)^2 3^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{(n+1)^2} =$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{n^2+2n+1} = 3 > 1$

المتسلسلة متباعدة

متسلسلات القوى :-

تسمى المتسلسلة غير المنتهية بالشكل :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \quad (1)$$

حيث $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ثوابت

متسلسلة قوى في x

وتسمى المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_1 (x-a) + a_2 (x-a)^2 + \cdots \quad (2)$$

متسلسلة قوى في (x-a) حيث a ثابت

لاي قيمة لـ x فان كلا المتسلسلتين (1) و (2) تصبح متسلسلة غير منتهية بحدود ثابتة واما تكون متقاربة او متباعدة .

فترة التقارب :

تسمى مجموعة قيم x التي تكون عندها متسلسلة القوى متقاربة بفترة التقارب . فالمتسلسلة (1) متقاربة عندما x=a , واذا وجدت قيم اخرى لـ x تتقارب عندها (1) و (2) فعندئذ اما ان تتقارب لجميع قيم x او لجميع قيم x في فترة زمنية منتهية مركزها عند النقطة x=0 بالنسبة للمتسلسلة (1) و x=a للمتسلسلة (2) ولايجاد فترة التقارب نستخدم اختبار النسبة للتقارب المطلق , اما فيما يتعلق بطرفي الفترة نستخدم الاختبارات الاخرى .

__مثال__1 : جد قيم x التي تجعل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n! x^n}{10^n}$ متقاربة .

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}(n+1)! x^{n+1}}{10^{n+1}} * \frac{10^n}{(-1)^n (n)! x^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|-(n+1)x\right| = |x| \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$$

المتسلسلة متباعدة لكل قيم $x \neq 0$.

أي انها متقاربة عند x=0.

__مثال__2 : جد جميع قيم x التي تجعل المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}$ متقاربة .

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{2^{2n+2}((n+1)!)^2} * \frac{2^{2n}(n!)^2}{(-1)^n x^{2n}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^2}{4(n+1)^2}\right| = \frac{1}{4}|x| \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^2} = 0$$

المتسلسلة متقاربة لجميع قيم x

<u>مثال</u> 3: جد جميع قيم x التي تجعل المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-2)^n}{n2^n}$ متقاربة .

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n(x-2)^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} * \frac{n2^n}{(-1)^{n-1}(x-2)^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)(x-2)n}{2(n+1)}\right| = \frac{1}{2}|x-2|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}$$

$$= \frac{1}{2}|x-2| < 1 \quad \Rightarrow |x-2| < 2 \quad \Rightarrow -2 < x-2 < 2$$

$$0 < x < 4$$

عندما x=0 $\leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-2)^n}{n*2^n}$

عندما $x = \frac{1}{2}$ $\leftarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n(n+1)(\frac{-1}{2})^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{(-2)^n(n+1)}{-2}) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)$$

$\lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$ *متباعدة*

فترة التقارب $\frac{1}{2} < \frac{3}{2}$

<u>تعريف</u>: متسلسلة تايلر للدالة f حول النقطة x=a تعرف كالتالي :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$= f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$

<u>تعريف</u> :

اذا كانت a=0 فان متسلسلة تايلر تصبح :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$= f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots$$

المتسلسلة اعلاه تسمى متسلسلة ماكلورين للدالة f.

مثال : جد متسلسلة ماكلورين للدالة $f(x)=e^x$ حول النقطة $x=0$.
او جد مفكوك الدالة $f(x)=e^x$ حول النقطة $x=0$.
جد مفكوك الدالة $f(x)=e^x$ بشكل متسلسلة قوى في x.

$$f(x)=e^x \qquad f(0)=1$$

$$f^1(x)=e^x \qquad f^1(0)=1$$

$$f^2(x)=e^x \qquad f^2(0)=1$$

$$\vdots$$

$$f^n(x)=e^x \qquad f^n(0)=1$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(0)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

استخدم النسبة لتبيين ان المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ متقاربة لجميع قيم x .

ملاحظة :

$$e^{x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!} \quad , \quad e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}$$

$$e^{3x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3x^2)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n x^{2n}}{n!}$$

مثال : جد مفكوك متسلسلة ماكلورين للدالة $f(x)=\sin(x)$.

$$f(x)=Sinx \qquad f(0)=0$$

$$f^{(1)}(x)=Sinx \qquad f^{(1)}(0)=1$$

$$f^{(2)}(x)=Sinx \qquad f^{(2)}(0)=0$$

$$f^{(3)}(x)=Sinx \qquad f^{(3)}(0)=-1$$

$$f^{(4)}(x)=Sinx \qquad f^{(4)}(0)=0$$

$$f^{(2n)}(x)=0 \qquad f^{(2n+1)}(0)=(-1)^n \qquad n\geq 0$$

$$\begin{aligned} f(x)=Sinx&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\\ &=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\end{aligned}$$

بنفس الطريقة الواردة في الامثلة اعلاه غير ان متسلسلة ماكلورين لبعض الدوال المعروفة هي بالشكل :

$$(1)\quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad , \qquad (2)\quad Sinx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad -\infty < x < \infty$$

$$(3)\quad Cosx == \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \qquad -\infty < x < \infty$$

$$(4)\quad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n \times n} \qquad (5)\quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad -1 < x < 1$$

$$(5)\quad (1+x)^p = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p-1)-...-(p-n+1)x^n}{n!}$$

<u>*مثال*</u> : جد مفكوك للدالة f(x)=Lnx بشكل متسلسلة قوى في x=3 . ثم جد فترة تقارب المتسلسلة الناتجة ؟

$$f(x) = Lnx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(4)}(3)}{n!}(x-3)^n$$

$$f^{(0)}(x) = Lnx \qquad f^{(0)}(3) = Ln3$$

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \qquad f^{(1)}(3) = \frac{1}{3}$$

$$f^{(2)}(x) = -x^{-2} \qquad f^{(2)}(3) = -\frac{1}{3^2} = \frac{(-1)^1 1!}{3^2}$$

$$f^{(3)}(x) = (-1)(-2)x^{-3} \qquad f^{(3)}(3) = \frac{(-1)(-2)}{3^3} = \frac{(-1)^2 2!}{3^3}$$

$$f^{(4)}(x) = (-1)(-2)(-3)x^{-4} \qquad f^{(4)}(3) = \frac{(-1)(-2)(-3)}{3^4} = \frac{(-1)^3 3!}{3^4}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)(-2)\cdots(-(n-1))x^{-n} \qquad f^{(n)}(3) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{3^n} \qquad \forall n \geq 1$$

$$Lnx = Ln3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!3^n}(x-3)^n$$

$$= Ln3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n3^n}(x-3)^n$$

الآن نجد فترة تقارب المتسلسلة اعلاه باستخدام اختبار النسبة

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n3^n}(x-3)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n (x-3)^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}} * \frac{n3^n}{(-1)^{n-1}(x-3)^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)n}{3(n+1)}\right| = \frac{|x-3|}{3} < 1$$

لكي تكون متقاربة

$$\frac{|x-3|}{3} < 1 \Rightarrow \frac{|x-3|}{3} < 1 \Rightarrow |x-3| < 3$$

$-3 < x-3 < 3 \Rightarrow 0 < x < 6$ فترة التقارب

الان نجد التقارب في طرفي الفترة .

عندما $x=0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-3)^n}{n3^n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$ توافقية متباعدة

عندما $x=6$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-3)^n}{n3^n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$ متقاربة حسب اختبار التناوب

اذن فترة التقارب هي $0 < x \le 6$

تمرين : جد مفكوك متسلسلة ماكلورين للدالة $f(x)=Ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

ضع $g(x)=Ln(1+x)$

$$f(x)=Ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=Ln(1+x)-Ln(1-x)=g(x)-g(-x)$$

$$g(x)=Ln(1+x) \qquad g(0)=Ln1=0$$

$$g^{(1)}(x)=\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1} \qquad g^{(1)}(0)=1=(-1)^0\,0!$$

$$g^{(2)}(x)=-(1+x)^{-2} \qquad g^{(2)}(0)=-1=(-1)^1 1!$$

$$g^{(3)}(x)=-(1)(-2)(1+x)^{-3} \qquad g^{(3)}(0)=(-1)^2\,2!$$

$$g^{(4)}(x)=(-1((-2)(-3)(1+x)^{-4} \qquad g^{(4)}(0)=(-1)^3\,3!$$

$$\cdots \qquad g^{n}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)! \qquad n\geq 1$$

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}x^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$$

$$g(-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-x)^n}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

$$f(x)=g(x)-g(-x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{n-1}+1\right]\frac{x^n}{n}$$

$$=2\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots\right]=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=Ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$a_n=\frac{x^{2n-1}}{2n-1} \quad , \quad a_{n+1}=\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\Rightarrow L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}}{\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}}\right|$$

$$=\left|x^2\right|\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}=x^2\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}=x^2$$

المتسلسلة تكون متقاربة عندما $L < 1$ أي عندما $x^2 < 1$

$x^2 < 1 \rightarrow -1 < x < 1$

عندما $x = -1$:

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{2n-1} = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$$

$$2n-1 < 2n \Rightarrow \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة (اختبار القوى $p=1$)

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ متباعدة (اختبار المقارنة)

عندما $x=1$:

$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ متباعدة (نفس الطريقة اعلاه)

اذن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ متقاربة عندما $-1 < x < 1$