$$S_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad a,b \in Z \right\}$$

$$S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad a \in Z \right\}$$

فإن كل من S_1, S_2 حلقة ونلاحظ أن $S_2 \leq S_1$ و S_1 ليس لها عنصر محايد بينما S_2 لها عنصر محايد هو $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

٤- إذا كان $S \leq R$ فقد يكون R لها عنصر محايد و S أيضاً لها عنصر محايد ولكن العنصرين المحايدين مختلفين ومثال على ذلك الحلقة S_2 في (٣) و $M_2(Z)$.

التشاكل الحلقي

Ring homomorphisms

نفرض أن كل من R,S حلقة .

تعريف :

الدالة $f : R \to S$ تسمى تشاكل حلقي إذا كان لكل $x, y \in R$ يتحقق أن :

$$(1) \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$(2) \quad f(xy) = f(x)f(y)$$

تعريف :

إذا كان $f : R \to S$ تشاكل حلقي فإن :

أ- المجموعة

$$\{x \in R : f(x) = 0\}$$

تسمى نواة التشاكل f (Kernel) ويرمز لها بالرمز ker f

أي أن :

$$\ker f = \{x \in R : f(x) = 0\}$$

ب- المجموعة

$$\{f(x) : x \in R\}$$

تسمى صورة التشاكل ويرمز لها بالرمز Im f أي أن :

$$\operatorname{Im} f = \{f(x) : x \in R\}.$$

نظرية :

إذا كان $f: R \to S$ تشاكل حلقي فإن :

أ- $f(0) = 0$.

ب- $f(-x) = -f(x)$ لكل $x \in R$.

جـ- إذا كان $A \leq R$ فإن $f(A) \leq S$.

د- إذا كان $B \leq S$ فإن $f^{-1}(B) \leq R$.

هـ - $\ker f \leq R$.

و- $\operatorname{Im} f \leq S$.

ز- f متباينة إذا وفقط إذا كان $\ker f = \{0\}$.

البرهان :

أ- تتحقق هذه العلاقة لأن :

$$\begin{aligned}
&0_R + 0_R = 0_R \\
&\to f(0_R + 0_R) = f(0_R) \\
&\to f(0_R) + f(0_R) = f(0_R) \\
&\to f(0_R) = 0_S
\end{aligned}$$

ب- تتحقق هذه العلاقة لأن :

$$-x + x = 0 \to f(-x) + f(x) = f(0) = 0$$

ومن ثم f(-x) هو المعكوس الجمعي للعنصر f(x) أي أن :

$$.f(-x) = -f(x)$$

جـ- حيث أن $A \neq \varphi$ فإن $f(A) \neq \varphi$.

الآن إذا كان $x, y \in f(A)$ فإنه يوجد $a, b \in A$ بحيث أن

$$x = f(a) \ , \ y = f(b)$$

ومن ثم $ab \in A$, $a - b$ لأن $A \leq R$

وتتحقق النتيجة الآن :

$$x - y = f(a) - f(b) = f(a - b) \in f(A)$$
$$xy = f(a)f(b) = f(ab) \in f(A)$$

د- $f : R \to S$ حيث أن $B \leq S$ فإن $0 \in B$

وحيث أن $f(0) = 0$ فإن $0 \in f^{-1}(B)$ ومن ثم $f^{-1}(B) \neq \phi$

وتتحقق النتيجة لأن :

$$\begin{aligned}
&x, y \in f^{-1}(B) \to f(x), f(y) \in B \\
&\to f(x) - f(y) \ , \ f(x)f(y) \in B \\
&\to f(x - y) \ , \ f(xy) \in B \\
&\to x - y \ , \ xy \in f^{-1}(B) \\
&\to f^{-1} \leq R
\end{aligned}$$

هـ - تتحقق هذه العلاقة من (جـ) لأن :

$$\operatorname{Im} f = f(R) \leq S$$

و- $\ker f = \{x \in R : f(x) = 0\}$, $f^{-1}\{0\} \leq R$

تتحقق هذه العلاقة من (د) حيث

$\{0\} \leq S$ و $\ker f = f^{-1}\{0\}$.

ز- نفرض أن $\ker f = \{0\}$ ونفرض أن $x, y \in R$ فإن

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\rightarrow f(x) - f(y) = 0 \\ &\rightarrow f(x-y) = 0 \\ &\rightarrow x - y \in \ker f \\ &\rightarrow x - y = 0 \\ &\rightarrow x = y \end{aligned}$$

أي أن f متباينة .

والعكس

نفرض أن f متباينة ونفرض أن $x \in \ker f$ فإن $f(x) = 0$
وحيث أن $f(0) = 0$ أي أن

$$f(x) = f(0)$$

وحيث أن f متباينة فإن x=0 أي أن $\ker f = \{0\}$.

خاصية :

إذا كانت $f: R \to S$ تشاكل حلقي شامل فإن :

أ- $f(e)=e'$ حيث e عنصر R المحايد و e' عنصر S المحايد

.

ب- إذا كان $x \in R$ عنصر وحده فإن :

$$f\left(x^{-1}\right)=f(x)^{-1}$$

جـ- إذا كانت R إبدالية فكذلك S .

البرهان:

أ- حيث أن f شامله فإنه لكل $y \in S$ يوجد $x \in R$ يحقق أن $f(x)=y$ ومن ثم نجد أن :

$$f(e)y=f(e)f(x)=f(ex)=f(x)=y$$

وكذلك

$$y\,f(e)=f(x)f(e)=f(xe)=f(x)=y$$

أي أن $f(e)=e'$.

ب- حيث أن :

$$f(x)f\left(x^{-1}\right)=f\left(xx^{-1}\right)=f(e)=e'$$

$$f\left(x^{-1}\right)f(x)=f\left(x^{-1}x\right)=f(e)=e'$$

فإن :

$$f\left(x^{-1}\right)=f(x)^{-1}\ .$$

جـ_ نفرض أن $y_1, y_2 \in S$ وحيث أن f شامله فإنه يوجد $x_1, x_2 \in R$ يحقق أن $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$ ومن ثم يكون :

$$\begin{aligned} y_1 y_2 &= f(x_1) f(x_2) \\ &= f(x_1 x_2) \\ &= f(x_2 x_1) \\ &= y_2 y_1 \end{aligned}$$

أي أن S إبدالية .

تعريف :

التشاكل الحلقي المتباين والشامل يسمى تماثل إذا وجد تماثل بين الحلقتين S,R فإنهما يسميان متماثلين وتكتب $R \cong S$.

أمثلة :

١-دالة الوحدة $x \to x \quad , \quad I : R \to R$
تماثل لكل حلقة R أي أن $R \cong R$.

٢-نفرض أن R حلقة ذات عنصر محايد e وأن $a \in R$ له معكوس فإن :

$$f_a : R \to R \quad , f_a(x) = axa^{-1}$$

تماثل وذلك لأن :

أ- F تشاكل لأن :

$$\begin{aligned}(i)\ f_a(x+y) &= a(x+y)a^{-1} \\ &= axa^{-1} + aya^{-1} \\ &= f_a(x) + f_a(y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(ii)\ f_a(xy) &= axya^{-1} \\ &= axeya^{-1} \\ &= (axa^{-1})(aya^{-1}) \\ &= f_a(x)f_a(y)\end{aligned}$$

ب- f متباينة لأنه لكل $x, y \in R$ نجد أن :

$$\begin{aligned}f_a(x) = f_a(y) &\to axa^{-1} = aya^{-1} \\ &\to x = y\end{aligned}$$

جـ- f شاملة لأنه لكل $y \in R$ نجد أن :

$$x = a^{-1}ya \in R$$

وتحقق أن :

$$\begin{aligned}f_a(x) = f_a(a^{-1}ya) &= aa^{-1}yaa^{-1} \\ &= eye = y\end{aligned}$$

٣-إذا كانت :

$$R = \left\{\begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} : a \in R\right\}$$

فإن Rمع عملية جمع وضرب المصفوفات حلقة ونجد أن

. $R \cong R$

تعريف :

الحلقة R تسمى منغمسة أو مغمورة (embedded) في الحلقة S إذا كانت تماثل حلقة جزئية من S .

أمثلة :

١-الحلقة Z منغمسة في الحلقة $M_2(Z)$ لأنها تماثل الحلقة الجزئية

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : a \in Z \right\}$$

من $M_2(Z)$.

٢-الحلقة الجزئية S من الحلقة R منغمسة في R .

٣-كل حلقة R منغمسة في نفسها.

الحلقات التامة والحقول

Imtegral domains and fields

تعريف :

العنصر غير الصفري x في الحلقة R يسمى قاسم للصفر (zero divisor) إذا وجد عنصر غير الصفر $y \in R$ يحقق أن :

xy=0

أمثلة :

١-كل من 2,3,4 قاسم للصفر في الحلقة Z_6 .
٢-كل من 2,4,5,6,8 قاسم للصفر في Z_{10} .
٣-الحلقة Z_P حيث p عدد أولي لا تحتوي على قاسم للصفر .
٤- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ قاسم للصفر في الحلقة $M_2(Z)$.
٥-كل من الحلقات $\mathbb{C}, \mathbb{R}, Q, Z, E, Q(\sqrt{p})$ خالية من قواسم الصفر .

تعريف:

الحلقة الإبدالية ذات العنصر المحايد الخالية من قواسم الصفر تسمى حلقة تامة (integral domains).

أمثلة :

١-كل من الحلقات $\mathbb{C},\mathbb{R},Q,Z,E,Q(\sqrt{2})$ حلقة تامة .

٢- الحلقة E ليست تامة لأنه ليس بها محايد .

٣-الحلقة Z_n حيث n عدد ليس أولي ليست تامة لأنها ليست خالية من قواسم الصفر .

٤- الحلقة الجزئية من الحلقة التامة ليس شرطاً أن تكون تامة .

٥-الحلقة الإبدالية ذات العنصر المحايد $Z(i)$ تامه لأنه إذا كان :

$$x=a+ib \quad , \quad y=c+id$$

فإن :

$$\begin{aligned}
xy=0 &\rightarrow (a+ib)(c+id)=0 \\
&\rightarrow (a+ib)(a-ib)(c+id)(c-id)=0 \\
&\rightarrow (a^2+b^2)(c^2+d^2)=0 \\
&\rightarrow a^2+b^2=0 \quad \text{or} \quad c^2+d^2=0 \\
&\rightarrow (a=0 \ \wedge \ b=0) \quad \text{or} \quad (c=0 \ \wedge \ d=0) \\
&\rightarrow x=0 \quad \text{or} \quad y=0
\end{aligned}$$

٦-الحلقة $M_2(Z)$ ليست تامه لأنها ليست إبدالية وبالإمكان وجود مصفوفتين حاصل ضربهم صفر فيها قاسم صفر .

نظرية :

الحلقة R خالية من قواسم الصفر إذا وفقط إذا كان قانون الحذف من اليمين ومن اليسار متحقق .

البرهان :

نفرض أنR خالية من قواسم الصفر وأن $a \in R$ عنصر غير الصفر فإن :

$$\begin{aligned} ba = ca &\rightarrow (b-c)a = 0 \\ &\rightarrow b-c = 0 \\ &\rightarrow b = c \end{aligned}$$

كذلك :

$$\begin{aligned} ab = ac &\rightarrow a(b-c) = 0 \\ &\rightarrow b-c = 0 \\ &\rightarrow b = c \end{aligned}$$

ولإثبات العكس

نفرض أن قانوني الحذ متحققين في R وأن

ab=0

إذا كانت b=0 فإن ab=a(0) ومنها b=0 .

إذا كانت $b \neq 0$ فإن ba=b(0) ومنها a=0 .

ab=0b أي أن R خالية من قواسم الصفر .

تعريف :

الحلقة R ذات العنصر المحايد تسمى حلقة قسمة (شبه حقل) إذا كان كل عنصر غير الصفر له معكوس .

تعريف :

الحلقة الإبدالية F ذات العنصر المحايد تسمى حقل

إذا كان كل عنصر غير الصفر له معكوس يساوي الحقل هو حلقة قسمة إبدالية تساوي حلقة القسمة الإبدالية تسمى حقل .

من هذا التعريف نستنتج أنه إذا كان $(F,+,\bullet)$ حقل فإن (F,+) زمره إبدالية كذلك $(F^*,\bullet)$ زمرة إبدالية

وأن الضرب توزيعي من اليمين ومن اليسار بالنسبة للجمع وكذلك كل حقل حلقة .

أمثلة :

١-كل من Q,R,C حقل .

٢-Z ليست حقلاً لأنه ليس كل عنصر غير الصفر له معكوس فقط 1,1- له معكوس .

٣-$Q(\sqrt{p})$ حيث p عدد أولي حقل .

٤-Z_p حقل لكل عدد أولي p .

نظرية:

كل حلقة تامة منتهية حقل .

البرهان :

نفرض أن :

$$R = \{a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n\}$$

حلقة تامة ، ونفرض أن $x \in R$ عنصر غير الصفر فإن العناصر

$$xa_1, xa_2, \ldots\ldots, xa_n$$

مختلفة مثنى مثنى لأنه إذا كان :

$$xa_i = xa_j$$

فإن

$$x\left(a_i - a_j\right) = 0$$

وحيث أن R خالية من قواسم الصفر فإن

$$a_i - a_j = 0$$

ومنها $a_i = a_j$ وهذا يناقض الفرض ،

الآن العنصر المحايد 1 ينتمي إلى R ومن ثم فإن :

$1 = xa_i$ لأحد قيم i وهذا يعني أن $x = a_i^{-1}$ وبذلك فإن كل عنصر غير الصفر له معكوس ومن ثم فإن R حقل .

تعريف :

المجموعة الجزئية غير الخالية E من الحقل $(F,+,\bullet)$ تسمى حقل جزئي من F إذا كان $(E,+,\bullet)$ حقل .

أمثلة :

١-Q حقل جزئي من R,C .
٢-R حقل جزئي من C .
٣-$Q\left(\sqrt{p}\right)$ حقل جزئي من R لكل عدد أولي p .
٤-Z_3 ليست حقل حقل جزئي من Z_5 لأن Z_5 حقل أولي أي لا يحوي حقل جزئي فعلي منه .
٥- $Q\left(\sqrt{3}\right)$ ليست حقل جزئي من Q .

نظرية :

المجموعة الجزئية غير الخالية E من الحقل $(F,+,\bullet)$ حقل جزئي من F إذا وفقط إذا كان :

$$xy^{-1} \in E$$
$$x - y \in E$$

لكل $xy \in E$.

البرهان :

تتحقق هذه النظرية لأن :

$$(E^*,\cdot)\le(F^*,\cdot) \quad , \quad (E,+)\le(F,+)$$

إذا وفقط إذا كان

$$.xy^{-1}\in E^* \quad , \quad x-y\in E$$

خاصية :

إذا كان كل من E_1,E_2 حقل جزئي من الحقل F فكذلك $E_1\bigcap E_2$, $E\neq F$.

تعريف :

الحقل الذي لا يحوي حقلاً جزئياً فعلياً يسمى حقل أولي .

أمثلة :

١- Z_p حقل أولي لكل عدد أولي p .

٢- R حقل ليس أولي لأنه يحوي حقل جزئي فعلي Q , $.Q\left(\sqrt{p}\right)$

٣- C حقل ليس أولي لأنه يحوي حقل جزئي فعلي Q, R .

٤- Q حقل أولي لأنه إذا كان S حقل جزئي من Q فإن $I \in S$.

نفرض أن $\frac{a}{b} \in Q$ أي أن

$a, b \in Z$ وأن $b \neq 0$

ومن ثم فإن $a.b \in S$ ومنها $\frac{a}{b} \in S$ وبهذا فإن $S = Q$.

٥- إذا كان الحقل S هو تقاطع الحقول الجزئية الفعلية للحقل F فإن S حقلاً أولياً .

مميز الحلقة

تعريف :

إذا كانت R حلقة فإن أصغر عدد صحيح موجب $n \in Z^{+}$ يحقق أن

na=0 لكل $a \in R$

ويسمى مميز الحلقة R ويكتب Char R =n .

في هذا التعريف إذا كان لا يوجد عدد صحيح موجب n يحقق أن

na=0 لكل $a \in R$

فإن مميز R هو الصفر أي أن Char R =0 .

فمثلاً :

Char Z = Char Q = Char R = Char C =0

بينما

Char Z_n =n

خاصية :

إذا كانت R حلقة ذات عنصر محايد فإن

Char R =n >0 إذا وفقط إذا كانت n هي أصغر عدد صحيح موجب يحقق أن n(1)=0 .

البرهان :

إذا كانت Char R =n فإن $n(1)=0$.

وإذا كان $m(1)=0$ حيث $0<m<n$ فإن :

$$ma=(m1)a=0a=0$$

لكل $a \in R$ وهذا يناقض أن Char R =n أي أن n هي أصغر عدد صحيح موجب يحقق أن $n(1)=0$.

ولإثبات العكس

نفرض أن n هي أصغر عدد صحيح موجب وأن $n(1)=0$ فإن :

$$na=(n1)a=0a=0$$

لكل ومن ثم فإن Char R =n .

خاصية :

مميز الحلقة التامة هو صفر أو عدد أولي .

البرهان :

نفرض أن R حلقة تامة وأن Char R =n>0 ، إذا كانت n عدد غير أولي فإن $n=rs$ حيث $0<r,s<n$ وحيث $n1=0$ فإن

$$(r1)(s1)=0$$

وحيث أن R خالية من قواسم الصفر فإن

s1=0 أو r1=0

وهذا يناقض الفرض أن Char R =n>0 بهذا فإن n يجب أن تكون عدداً أولياً .

نظرية :

نفرض أن R حلقة تامة

أ) Z منغمسة في R إذا كان Char R =0 .

ب) منغمسة في Rإذا كان Char R =p حيث p عدد أولي .

البرهان :

(أ) نفرض أن e هو العنصر المحايد في R .

الدالة

$$f : Z \to R \quad , \quad f(n) = ne$$

تشاكل حلقي ،

وهذا التشاكل أحادي لأنه لكل $n, m \in Z$ ونجد أن :

$$f(m) = f(n) \to me = ne$$

وحيث أن R خالية من قواسم الصفر لأنها تامة فإن m=n

أي ان F متباينة (أحادية) بهذا فإن $Z \cong f(Z)$ حيث $f(Z) \le R$.