$$f(z)=\sum_{i=0}^{n} a_i z^i=0$$

ومن ثم فإن :

$$f(\bar{z})=\sum_{i=0}^{n} a_i(\bar{z})^i$$

$$=\overline{\sum_{i=0}^{n} a_i z^i}=\bar{0}=0$$

أي أن $\bar{z}$ جذر لكثيرة الحدود f(x) .

نتيجة :

إذا كانت f(x) كثيرة حدود وكان deg(f(x))=n عددا فرديا فإنه يوجد على الأقل جذر حقيقي واحد.

البرهان :

نفرض أن جميع جذور f(x) مركبة وهي $r_1,r_2,\ldots,r_n\in C$ وهذا يعني أن $r_i\neq\bar{r_i}$ لكل i ،

وحيث أن $\bar{r_i}$ جذر لكثيرة الحدود فإن $\left(r_i\ ,\ \bar{r_i}\right)$ زوج من الجذور المختلفة لكثيرة الحدود f(x) لكل i ،

وهذا يعني أن n عدد زوجياً وهذا يناقض الفرض ومن ثم فإنه يوجد على الأقل جذر حقيقي واحد لكثيرة الحدود f(x) .

تعريف :

إذا كانت R حلقة تامة فإن كثيرة الحدود الواحدية $d(x) \in R[x]$ تسمى قاسم مشترك أعظم (greatest common divisor) لكثيرتي الحدود غير الصفريتين $f(x), g(x) \in R[x]$ إذا كان :

أ) $d(x) | g(x)$, $d(x) | f(x)$.

ب) إذا كانت $c(x) | f(x)$, $c(x) | g(x)$
فإن $c(x) | d(x)$ وتكتب كذلك :

$$d(x)=\gcd(f(x),g(x))$$

أمثلة :

١) إذا كانت

$$f(x)=x^3+1 \ , \ g(x)=x^2-1$$

كثيرتي حدود في Z(x) فإن :

$$f(x)=(x+1)(x^2-x+1)$$

$$g(x)=(x+1)(x-1)$$

ومن ثم فإن

$d(x)=(x+1)=\gcd(f(x),g(x))$.

٢) إذا كانت

$$g(x)=x^3+4x^2+7x+6\in Q[x]$$
$$f(x)=x^4+2x^3+2x^2-2x-3\in Q[x]$$

فإن $f(1)=f(-1)=0$ ومن ثم فإن :

$$(x-1)(x+1)\,|\,f(x)$$

أي أن :

$$f(x)=(x-1)(x+1)(x^2+2x+3)$$

أيضا

$(x+2)\,|\,g(x)$ لأن $g(-2)=0$ ومن ثم

$$g(x)=(x+2)(x^2+2x+3)$$

ومن ثم فإن

$$\gcd(f(x),g(x))=x^2+2x+3$$

نظرية :

إذا كانت F حقلاً فإنه لأي كثيرتي حدود غير صفريتين $f(x),g(x)\in F[x]$ قاسم مشترك أعظم وحيد $d(x)\in F[x]$ كما توجد كثيرتي حدود $s(x),t(x)\in F[x]$

بحيث أن :

$$d(x)=s(x)f(x)+t(x)g(x)$$

البرهان :

نعلم أنه توجد كثيرتي حدود وحيدتين $p_1(x), r_1(x) \in F[x]$ بحيث أن

$$f(x) = p_1(x)g(x) + r_1(x)$$

وأن $r_1(x) = 0$ أو $\deg(r_1(x)) < \deg(g(x))$

إذا كان $r_1(x) = 0$ فإن $d(x) = g(x)$

أما إذا كان $r_1(x) \neq 0$ فإننا نقسم g(x) على $r_1(x)$ فيكون

$$g(x) = p_2(x)r_1(x) + r_2(x)$$

حيث $r_2(x) = 0$ أو $\deg(r_2(x)) < \deg(r_1(x))$

فإذا كانت $r_2(x) = 0$ فإن $d(x) = c^{-1}r_1(x)$

حيث $c = 1.(r_1(x))$

أما إذا كان $r_2(x) \neq 0$:

نكرر عملية القسمة السابقة عدة مرات وحيث :

$$\deg(g(x)) > \deg(r_1(x)) > ......$$

ونجد أن :

$$f(x) = p_1(x)g(x) + r_1(x)$$
$$g(x) = p_2(x)r_1(x) + r_2(x)$$
$$r_1(x) = p_3(x)r_2(x) + r_3(x)$$

.

وهكذا حتى يكون :

$$r_{m-2}(x)=p_m(x)r_{m-1}(x)+r_m(x)$$

و

$$\deg(r_m(x))<\deg(r_{m-1}(x))$$

و أخيراً

$$r_{m-1}(x)=p_{m+1}(x)r_m(x)$$

ومن ثم نجد أن $r_m(x)$ هو القاسم المشترك لكثيرتي الحدود f(x),g(x) وإذا كان $L(r_m(x))=c_m$ فإن

$$. \ d(x)=c_m^{-1}r_m(x)$$

و بإستخدام المعادلات السابقة بالتعويض من أسفل إلى أعلى يمكن إيجاد $s(x),t(x)\in F[x]$.

بحيث أن

$$d(x)=s(x)f(x)+t(x)g(x)$$

نفرض أن e(x) قاسم مشترك أعظم لكثيرتي الحدود f(x),g(x) فإن e(x)|d(x) وايضاً d(x)|e(x) ومن ثم فإن :

$$d(x)=h(x)e(x)$$

و

$$e(x)=k(x)d(x)$$

حيث $h(x),k(x)\in F[x]$ ومن ثم فإن

d(x)=h(x)k(x) d(x)

ومن ثم فإن k(x)h(x)=1 وذلك لأن F[x] خالية من قواسم الصفر بهذا فإن

$$k(x) = b \in F \ , \ h(x) = a \in F$$

ولكن L(d(x))=L(e(x))=1 أي أن a=b ومن ثم فإن d(x)=e(x).

أمثلة :

١-نفرض أن

$$f(x) = 2x^4 - 3x^3 - x^2 + 21x + 10$$
$$g(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7x + 5$$

كثيرتي حدود في R[x] بقسمة f(x) على g(x) نجد أن

$$f(x) = (x+1)g(x) + 3(x^2 - 3x + 5)$$

أي أن:

$$r_1(x) = 3(x^2 - 3x + 5) \quad , \ p_1(x) = x + 1$$

وحيث أن

$$2 = \deg(r_1(x)) < \deg(g(x)) = 3$$

فإننا نقسم g(x) على $r(x) = x^2 - 3x + 5$

فيكون g(x)=(2x+1)r(x)

فإن :

$$d(x)=x^2-3x+5$$

ولإيجاد $s(x),t(x)\in R[x]$ نلاحظ أن :

$$f(x)=(x+1)g(x)-3d(x)$$

ومن ثم فإن

$$d(x)=\frac{-1}{3}f(x)+\left(\frac{x+1}{3}\right)g(x)$$

ومن ثم فإن

$$s(x)=\frac{-1}{3}\quad,\quad t(x)=\frac{x+1}{3}$$

٢-إذا كان

$$f(x)=x^4-3x^3+x^2+1$$
$$g(x)=x^3-1$$

كثيرتي حدود في Q[x] بقسمة f(x) على g(x) نجد أن

$$f(x)=(x^3-1)(x-1)+(-x^2+x)$$

أي أن

$$r_1(x)=-x^2+x\quad,\quad p_1(x)=x-1$$

وحيث أن

$$2=\deg(r_1(x))<\deg(g(x))=3$$

فإننا نقسم g(x) على $r_1(x)$ فنجد أن

$$g(x)=r_1(x)(-x-1)+(x-1)$$

ويكون

$$1=\deg(r_2(x))<\deg(r_1(x))=2$$

ومن ثم نقسم $r_1(x)$ على $r_2(x)$ فيكون

$$r_1(x)=-xr_2(x)$$

ومن ثم d(x)=x-1 ولإيجاد $s(x),t(x)\in Q[x]$

نلاحظ أن

$$-x^2+x=f(x)-g(x)(x-1)$$

لكن

$$d(x)=(x-1)=g(x)-(-x^2+1)(-x-1)$$

$$=g(x)-[f(x)-g(x)(x-1)](-x-1)$$

$$=f(x)(x+1)+g(x)[1-(x^2+1)]$$

$$=f(x)(x+1)+g(x)(2-x^2)$$

أي أن

$$s(x)=x+1 \quad , \quad t(x)=2-x^2$$

٣-إذا كانت

$$f(x)=x^5+2x^3+x^2+2x$$

$$g(x)=x^4+x^3+x^2$$

كثيرتي حدود في $Z_3[x]$ فإن

$$f(x)=g(x)(x+2)+2(x^3+x^2+x)$$

$$g(x)=x(x^3+x^2+x)$$

ومن ثم فإن

$$d(x)=x^3+x^2+x$$

و نلاحظ أن

$$2^{-1} = 2 \in Z_3$$

ولإيجاد t(x),s(x) نلاحظ أن :

$$f(x)=g(x)(x+2)+2d(x)$$

ومن ثم

$$d(x)= 2f(x)+g(x)(x+2)$$

أي أن :

$$t(x)=x+2 \quad , \quad s(x)=2$$

تعريف :

تسمى كثيرة الحدود $f(x) \in R[x]$ قابلة للتحليل على R إذا كانت f(x)=g(x)h(x) حيث $g(x),h(x) \in R[x]$

و

$$0<\deg(g(x))<\deg(f(x))$$
$$0<\deg(h(x))<\deg(f(x))$$

وإذا لم تكن f(x) قابلة للتحليل فإنها تسمى <u>غير قابلة للتحليل</u> (**irreducible**) .

أمثلة :

١-إذا كانت R حلقة خالية من قواسم الصفر وكان $f(x) \in R[x]$ حيث deg(f(x))=1 فإن f(x) غير قابلة للتحليل على R

لأنه إذا كانت $f(x)=g(x)h(x)$ فإن

$$deg(g(x))<deg(f(x))=1$$

$$deg(h(x))<deg(f(x))=1$$

ومن ثم فإن

$$deg(g(x))=deg(h(x))=0$$

وحيث أن :

$$deg(f(x))=deg(g(x))+deg(h(x))=0$$

أي أن $deg(f(x))=0$

وهذا يناقض الفرض بذلك فإن $f(x)$ غير قابلة للتحليل على R .

٢-كثيرة الحدود

$$f(x)=x^2-1\in Z[x]$$

قابلة للتحليل على Z لأن $f(x)=g(x)h(x)$ حيث

$$h(x)=x+1 \quad , \quad g(x)=x-1$$

٣-إذا كانت

$$f(x)=x^2-2\in Q[x]$$

فإن $f(x)$ غير قابلة للتحليل على Q لأن ذلك يعني وجود $a,b\in Q$ بحيث أن

$$f(x)=(x-a)(x-b)$$

ومن ثم

$ab=-2$ ، $a+b=0$

ومن ثم $a^2=2$ أي أن $a=\sqrt{2}\in Q$ وهذا غير ممكن .

نظرية :

إذا كان F حقلاً و $f(x)\in F[x]$ حيث

$\deg(f(x))=2$ أو $\deg(f(x))=3$

فإن f(x) قابلة للتحليل على F إذا كان لكثيرة الحدود f(x) جذرا في F .

البرهان :

نفرض أن f(x) قابلة للتحليل على F فإنه توجد كثيرتي حدود غير ثابتتين $f(x),g(x)\in F[x]$ بحيث أن :

$f(x)=g(x)h(x)$

و $\deg(g(x))<\deg(f(x))$ ، $\deg(h(x))<\deg(f(x))$

وحيث أن

$\deg(f(x))=2$ أو $\deg(f(x))=3$

فيكون إما أن

$\deg(g(x))=1$ أو $\deg(h(x))=1$

وفي كلتا الحالتين يكون لكثيرة الحدود f(x) جذرا واحداً في F .

المثاليات وحلقات الباقي

Ideals and quotient ringes

تعريف :

المجموعة الجزئية غير الخالية A من الحلقة R تسمى مثالية من R ونكتب $A \lhd R$ إذا كان :

أ) $a-b \in A$ لكل $a,b \in A$.

ب) $ar\ ,ra \in A$ لكل $a \in A\ ,\ r \in R$.

أمثلة :

١-كل من {R,{0 مثالية لكل حلقة R .

٢- nz مثالية في الحلقة Z لكل $n \in Z$ لأنه لكل $a,b \in nZ$ نجد أن a=nx , b=ny حيث $x,y \in Z$ ومن ثم

$$a-b=nx-ny=n(x-y)\in nZ$$

كذلك

$$ra=r(nx)=n(rx)\in nZ$$

$$ar=(nx)r\in nZ$$

وذلك لكل $r \in Z$.

خاصية :

إذا كان كل من A وb مثالية من الحلقة R فكذلك $A \bigcap B$.

خاصية :

إذا كانت الحلقة R ذات عنصر محايد وكانت A مثالية في R تحتوي على العنصر المحايد فإن A=R .

البرهان :

تتحقق هذه العلاقة لأن

$$r \in R \to r = r1 \in A$$

أي أن $R \subseteq A$ ومن ثم A=R .

نتيجة :

نفرض أن Rحلقة ذات عنصر محايد . إذا كانت المثالية A من R تحتوي على عنصر قابل للانعكاس فإن A=R .

البرهان :

إذا كان $a \in A$ قابل للانعكاس فإن $aa^{-1} = 1 \in A$ وتحقق النتيجه من الخاصية السابقة .

خاصية :

الحلقة الإبدالية ذات العنصر المحايد R تكون حقلاً إذا كانت لا تحتوي على مثالية غير {0},R .

البرهان :

نفرض أن R حقلاً وأن $\varphi \neq A \lhd R$ فإنه $0 \neq a \in A$ حيث a قابل للانعكاس فإن A=R .

ولإثبات العكس :

نفرض أن R حلقة إبدالية ذات عنصر محايد وأنه لا يوجد مثالية في R غير R,{0} نفرض أن $0 \neq a \in R$ فإن $aR = \{ar = ra : r \in R\}$ مثالية في R .

فإذا كانت R لا تحتوي على مثاليات غير R,{0} فإن aR=R وحيث أن $1 \in R$ فإنه يوجد $x \in R$ يحقق أن ax=1 ومن ثم فإن a قابل للانعكاس ومن ثم تكون R حقلا .

تعريف :

نفرض أن S مجموعة غير خالية من الحلقة R فإن تقاطع جميع المثاليات في R والتي تحتوي على S ، ويرمز لها بالرمز <S> يسمى المثالية المولدة بالمجموعة S . وإذا كانت

$$S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

فإن <S> تسمى *مثالية ذات مولدات منتهية*

. (Finitely generatail ided)

تعريف :

إذا كانت S={x} مجموعة جزئية من الحلقة R فإن <S> يسمى *مثالية رئيسية* (Principle ideal).

تعريف :

إذا كان كل مثالية في الحلقة R مثالية رئيسية يسمى R حلقة مثاليات رئيسية (Principle ideal ring).

من التعريفات السابقة نستنتج أن :

$$< S >= \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i b_i : a_i, b_i \in R, x_i \in S \right\}$$

وإذا كانت R حلقة إبدالية فإن

$$< x_1, x_2, ..., x_n >= \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i r_i : r_i \in R \right\}$$

وإذا كانت S={x} فإن :

$$< x >= \{ xr + nx : r \in R, n \in Z \}$$

وإذا كانت $1 \in R$ فإن :

$$< x >= \{ xr : r \in R \}$$

أمثلة :

١-الحلقة التامة Z هي حلقة مثاليات رئيسية تامة لأنه إذا كانت $Z \lhd A$ فإن :

أ) إذا كانت $A=\{0\}$ فإن $A=\langle 0\rangle$.

ب) إذا كانت $A \neq \{0\}$ فإن A تحتوي على عدداً صحيحاً موجباً .

٢-كل حقل F هو حلقة مثاليات رئيسية تامة فإذا كانت $A \lhd F$ فإن :

أ) إذا كانت $A=\{0\}$ فإن $A=\langle 0\rangle$.

ب) إذا كانت $A \neq \{0\}$ وكان $0 \neq r \in A$ فإن $r \in F$ ومن ثم فإن r قابلة للانعكاس ومن ثم فإن $A=F=\langle r\rangle$ وذلك لأن

$$<r>=\{ar : a \in F\} = rF = F$$

٣-إذا كان $A, B \lhd F$ فإن $A \cup B$ قد لا يكون مثالية في R فمثلاً في Z نجد أن كل من $A=\langle 2\rangle$ و $B=\langle 3\rangle$ مثالية في Z بينما $A \cup B \ntriangleleft F$ لأنه مثلاً $2,3 \in A \cup B$ بينما $2+3 \notin A \cup B$.

تعريف :

إذا كان كل من A,B مثالية في الحلقة R فيعرف مجموعهما A+B وضربهما AB كالآتي :

$$A + B = \{a + b : a \in A \wedge b \in B\}$$

$$AB = \left\{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i : a_i \in A \wedge b_i \in B\right\}$$

$A=\{a,b\}$, $B=\{x,y\}$

$A+B=\{a+x,a+y,b+x,b+y\}$

$$AB=\{ax,ay,bx,by,ax+ay,ax+bx,ax+by,$$
$$ay+bx,ay+by,bx+by,ax+ay+bx,$$
$$ax+by+ay,ax+bx+by,ay+bx+by,$$
$$ax+ay+bx+by\}$$

٣-في الحلقة Z_{12} نجد ان كل من :

$$A=\langle 4\rangle=\{0,4,8\}$$

$$B=\langle 3\rangle=\{0,3,6,9\}$$

مثالية ونجد أن :

$$A+B=Z_{12} \quad , AB=\{0\}$$

٤- نفرض أن A=<x> مثالية في Z[x] فإن :

$$A+A=A \quad , AA=A^2=\langle x^2\rangle$$

تمارين

حل تمارين الفصل الثالث من كتاب (الجبر المجرد الحديث د.م بيرتون)