أنظمة البديهيات(The Axiomatic System) /رقم المقرر /ر ٢١٩

/جامعة البصرة/كلية العلوم/قسم الرياضيات/ مدرس المادة/د. شكر محمود

النظام البديهي:

يتكون النظام البديهي من العناصر التالية:

أولا: الكلمات الأولية (الكلمات غير المعرفة): **Undefined terms**

وهي مجموعة كلمات في النظام البديهي تقبل بدون تعريف وهي على نوعين:

أ- الكلمات التقنية "Technical Terms"

وهي مجموعة كلمات تكتب في بداية تعريف النظام البديهي وتعتبر أساس بناء النظام البديهي وغالبا ما تكون قليلة العدد ومن الأمثلة عليها (النقطة، الخط، التطابق، البين،......)

ب- الكلمات المنطقية "Logical Terms"

وهي مجموعة من الكلمات تكون مشتركة بين معظم الأنظمة البديهية ومبنية على أساس المنطق الرياضي ومثال عليها (كل، يوجد، على الأقل، على الأكثر،.......)

ثانيا: الكلمات المعرفة: **Defined terms**

لا يمكن استخدام أي مصطلح في الرياضيات إلا بعد تعريفة ومن الشروط الواجب توفرها في التعريف هي:

أ- البساطة: يشترط في التعريف أن يحتوي على أشياء بسيطة وواضحة بحيث يعتمد على كلمات معرفة سابقا أو كلمات أولية. لقد عرف إقليدس النقطة بأنها الشيء الذي لا بعد له وعرف المستقيم بأنه الشيء الذي له طول وليس له عرض وهذه التعاريف غير مقبولة لأنها تحتوي على كلمات غير معرفة (البعد، الطول، العرض).

ب- غير دوري: أي انه يجب إن لا نعرف س بدلاله ص ثم نعرف ص بدلاله س. فمثلا عندما نقول بان المستقيم هو مجموعة من النقاط ثم نعرف النقطة بأنها تقاطع مستقيمين فان هذا التعريف غير مقبول لأنه دوري.

ت- الوحدانية: أي إن التعريف لكلمه ما يجب إن يكون بطريقة بحيث لاينطبق هذا التعريف على كلمة أخرى. فمثلا تعريف المستقيم بأنه مجموعة من النقاط هو تعريف غير مقبول لأنه ينطبق أيضا على الدائرة والمربع والمثلث.

ثالثا: البديهيات : **Axioms**

وهي فرضيات بسيطة التركيب وواضحة البيان وقليلة العدد وصادقه دائما في النظام البديهي ولا تحتاج إلى برهان وتتكون البديهيات من الكلمات الأولية والكلمات المعرفة. لقد عرف هلبرت البديهية بأنها (فرضيه حول الكلمات الأولية) وعرف باسكال البديهية بأنها (بلغت حدا من الوضوح بحيث يستحيل الحصول على جملة أوضح منها للبرهنة عليها).

البديهيات تختص بالنظام البديهي المعني ويمكن إن تكون احد البديهيات في نظام بديهي معين مبرهنة في نظام بديهي أخر.

رابعا: المبرهنات: **Theorems**

وهي حقيقة داخل النظام البديهي وتحتاج إلى برهان ويكون البرهان إما باستخدام البديهيات أو باستخدام المبرهنات السابقة التي تم برهنتها أي إن المبرهنة هي استنتاج منطقي من النظام البديهي.

ملاحظة: تعتبر الهندسة احد الأمثلة على الأنظمة البديهية ويقال على النظام البديهي بأنة منتهي إذا احتوى على عدد محدد من النقاط وبعكسه فان النظام يكون غير منتهي.

المستوي الاسقاطي:Projective Plane

يعتبر المستوي الاسقاطي مثال لنظام بديهي حيث يرمز لهذا المستوي بالرمز Ω ويحتوي على الكلمات الأولية (النقطة والخط) حيث سنرمز للنقاط بالحروف الكبيرة A,B,C,......... وللخطوط بالحروف الصغيرة l,m,n,..... .

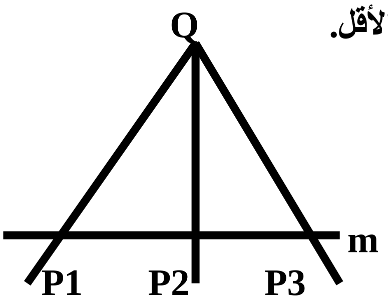
(النظام البديهي الأول): يتكون هذا النظام من البديهيات التالية

A1(a): أي نقطتين مختلفتين يحتويهما على الاقل خط واحد فقط.

A1(b): أي نقطتين مختلفتين يحتويهما على الاكثر خط واحد فقط.

A2: كل خط يحتوي على الأقل ثلاثة نقاط مختلفة.
A3: أذا كان L خطاً فتوجد على الأقل نقطة بحيث إن النقطة لا تقع على الخط L.
A4: يوجد على الأقل خط واحد

مبرهنة ١ : يوجد على الاقل ثلاث نقاط مختلفة.
البرهان: حسب البديهية [A4] يوجد خط واحد مثل L , حسب البديهية [A2] توجد على الاقل ثلاث نقاط مثل Q1، Q2،Q3 على الخط L
∴ توجد ثلاث نقاط مختلفة في هذا النظام .
مبرهنة ٢ : يوجد على الأقل ثلاث خطوط مختلفة.
مبرهنة ٣ : توجد على الأقل سبع نقاط مختلفة.
مبرهنة ٤ : كل نقطة في المستوي الاسقاطي يمر بها ثلاثة خطوط مختلفة على الأقل.



المفروض: Q نقطة في المستوي الاسقاطي.
م.ث.: توجد ثلاثة خطوط مختلفة على الأقل تمر من النقطة Q.
البرهان: يوجد خط مثل m لا يمر من النقطة Q. [A3]
حسب البديهية [A2] توجد ثلاث نقاط مختلفة على الخط m مثل P1, P2, P3
∴ حسب البديهية [A1] توجد: خط واحد فقط يمر بالنقطتين Q, P1
خط واحد فقط يمر بالنقطتين Q, P2
خط واحد فقط يمر بالنقطتين Q, P3
∴ توجد ثلاث خطوط مختلفة على الأقل تمر من النقطة Q وهي QP1, QP2, QP3
مبرهنة ٥ : يوجد على الأقل سبع خطوط مختلفة.
مبرهنة ٦ : كل خطين مختلفين يشتركان في نقطة واحدة على الاكثر.
المفروض : l, m خطين مختلفين.
م. ث. : l, m يشتركان في نقطة واحدة على الاكثر.
البرهان : نبرهن بطريقة التناقض
نفرض ان الخطين l, m يشتركان في نقطتين مختلفتين مثل A, B
∴ حسب [A1] فان l=m وهذا خلاف الفرض لان l, m خطان مختلفان
∴ الخطين l, m يشتركان في نقطة واحدة على الأكثر.

مبرهنة ٧ : ليست كل الخطوط تمر في نقطة واحدة.
ملاحظات:
١. { واحد فقط }={ على الأقل واحد} ∩ { على الأكثر واحد }
٢. العبارات التالية متكافئة: (النقطة P تقع على الخط m، الخط m يحتوي النقطة P، الخط m يمر من النقطة P، النقطة P تنتمي إلى الخط m).
٣. العبارات التالية متكافئة: (النقطة P تنتمي إلى الخطين l, m ، الخطين l, m يتقاطعان في النقطة P ، النقطة P تقع على الخطين l, m، الخطين l, m يشتركان في النقطة P).
(النظام البديهي الثاني): يتكون هذا النظام من البديهيات التالية
A1(a): أي نقطتين مختلفتين يحتويهما على الاقل خط واحد فقط.
A1(b): أي نقطتين مختلفتين يحتويهما على الاكثر خط واحد فقط.
A2: كل خط يحتوي على الأقل ثلاثة نقاط مختلفة.
A3: أذا كان L خطاً فتوجد على الأقل نقطة بحيث إن النقطة لا تقع على الخط L.
A4: يوجد على الأقل خط واحد.
A5: اذا كان l خط و P نقطة لا تقع علية فيوجد خط واحد فقط يمر من P ويوازي l.
(النظام البديهي الثالث): يتكون هذا النظام من البديهيات التالية
A1(a): أي نقطتين مختلفتين يحتويهما على الاقل خط واحد فقط.
A1(b): أي نقطتين مختلفتين يحتويهما على الاكثر خط واحد فقط.
A2: كل خط يحتوي على الأقل ثلاثة نقاط مختلفة.

A3: أذا كان L خطاً فتوجد على الأقل نقطة بحيث إن النقطة لا تقع على الخط L.
A4: يوجد على الأقل خط واحد.
A5: اذا كان l خط و P نقطة لا تقع علية فيوجد خط واحد فقط يمر من P ويوازي l.
A6: أذا كان L خطاً فتوجد على الاكثر ثلاث نقاط عليه

(النظام البديهي الرابع): يتكون هذا النظام من البديهيات التالية
A1(a): أي نقطتين مختلفتين يحتويهما على الاقل خط واحد فقط.
A1(b): أي نقطتين مختلفتين يحتويهما على الاكثر خط واحد فقط.
A2: كل خط يحتوي على الأقل ثلاثة نقاط مختلفة.
A3: أذا كان L خطاً فتوجد على الأقل نقطة بحيث إن النقطة لا تقع على الخط L.
A4: يوجد على الأقل خط واحد.
A5: كل خطان مختلفان يشتركان بنقطة واحدة.

(النظام البديهي الخامس): يتكون هذا النظام من البديهيات التالية
A1(a): أي نقطتين مختلفتين يحتويهما على الاقل خط واحد فقط.
A1(b): أي نقطتين مختلفتين يحتويهما على الاكثر خط واحد فقط.
A2: كل خط يحتوي على الأقل ثلاثة نقاط مختلفة.
A3: أذا كان L خطاً فتوجد على الأقل نقطة بحيث إن النقطة لا تقع على الخط L.
A4: يوجد على الأقل خط واحد.
A5: كل خطان مختلفان يشتركان بنقطة واحدة.
A6: أذا كان L خطاً فتوجد على الاكثر ثلاث نقاط عليه

(النظام البديهي السادس): يتكون هذا النظام من البديهيات التالية
A1: كل خطان مختلفان يشتركان بنقطة واحدة.
A2: كل نقطة يمر بها خطان مختلفان.
A3: يوجد بالضبط خمسة خطوط مختلفة.

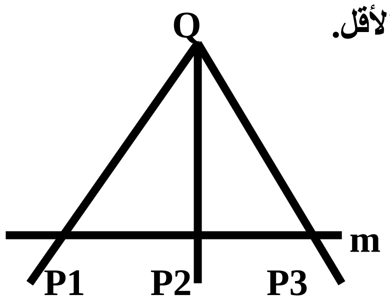
(النظام البديهي السابع): يتكون هذا النظام من البديهيات التالية
A1: أي نقطتين مختلفتين يحتويهما خط واحد فقط
A2: توجد على الاقل نقطتان مختلفتان
A3: أذا كان L خطاً فتوجد نقطة بحيث إن النقطة لا تقع على الخط L.
A4: اذا كان l خط و P نقطة لا تقع علية فيوجد خط واحد فقط يمر من P ويوازي l.

أهم أنواع المستويات

اولا- المستوي الاسقاطي: Projective Plane

يعتبر المستوي الاسقاطي مثال لنظام بديهي حيث يرمز لهذا المستوي بالرمز Ω ويحتوي على الكلمات الأولية (النقطة والخط) حيث سنرمز للنقاط بالحروف الكبيرة A,B,C,……… وللخطوط بالحروف الصغيرة l,m,n,….. ، وبديهيات هذا المستوي هي:
A1: أي نقطتين مختلفتين يحتويهما خط واحد فقط.
A2: كل خط يحتوي على الأقل ثلاثة نقاط مختلفة.
A3: توجد على الأقل نقطة ويوجد على الأقل خط بحيث إن النقطة لا تقع على الخط.
A4: كل خطين مختلفين يشتركان في نقطة واحدة على الأقل.

<u>مبرهنة ١ :</u> كل خطين مختلفين يشتركان في نقطة واحدة فقط.
المفروض: m, n خطين مختلفين في المستوي الاسقاطي.
م. ث. : الخطين m, n يشتركان في نقطة واحدة فقط.
البرهان: حسب البديهية [A4] توجد نقطة مثل Q مشتركة بين الخطين m, n
نفرض وجود نقطة أخرى مشتركة بين الخطين m, n هي النقطة P
$\therefore$ الخطين m, n يشتركان بنقطتين مختلفتين
$\therefore$ حسب بديهية [A1] فان m=n وهذا خلاف الفرض لان m, n خطين مختلفين
$\therefore$ الخطين m, n يشتركان بنقطة واحدة فقط



<u>مبرهنة ٢:</u> كل نقطة في المستوي الاسقاطي يمر بها ثلاثة خطوط مختلفة على الأقل.

المفروض: Q نقطة في المستوي الاسقاطي.

م.ث.: توجد ثلاثة خطوط مختلفة على الأقل تمر من النقطة Q.

البرهان: يوجد خط مثل m لا يمر من النقطة Q. [A3]

حسب البديهية [A2] توجد ثلاث نقاط مختلفة على الخط m مثل P1, P2, P3

∴ حسب البديهية [A1] توجد: خط واحد فقط يمر بالنقطتين Q, P1

خط واحد فقط يمر بالنقطتين Q, P2

خط واحد فقط يمر بالنقطتين Q, P3

∴ توجد ثلاث خطوط مختلفة على الأقل تمر من النقطة Q وهي QP1, QP2, QP3

<u>ملاحظات:</u>

١. { واحد فقط }= { على الأقل واحد} ∩ { على الأكثر واحد }
٢. العبارات التالية متكافئة: (النقطة P تقع على الخط m، الخط m يحتوي النقطة P، الخط m يمر من النقطة P، النقطة P تنتمي إلى الخط m).
٣. العبارات التالية متكافئة: (النقطة P تنتمي إلى الخطين l, m ، الخطين l, m يتقاطعان في النقطة P ، النقطة P تقع على الخطين l, m، الخطين l, m يشتركان في النقطة P).

<u>المستوي الاسقاطي المنتهي:</u>

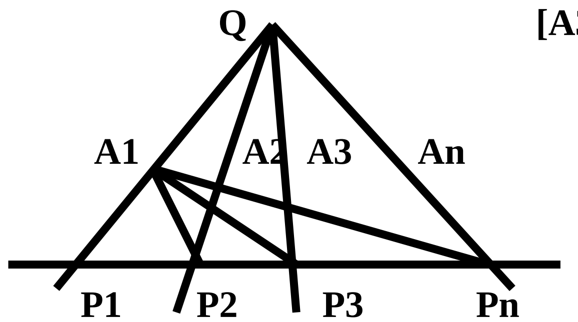
هو مستوي إسقاطي يحتوي على مجموعة منتهية من النقاط والخطوط.

<u>مبرهنة ٣:</u> اذا وجد خط في المستوي الاسقاطي يحتوي بالضبط على n من النقاط المختلفة فان المستوي الاسقاطي يحتوي بالضبط على n^2-n+1 من النقاط.

المفروض: l خط في المستوي الاسقاطي يحتوي بالضبط على n من النقاط المختلفة P1,P2,P3,….,Pn

م. ث.: عدد نقاط المستوي الاسقاطي بالضبط n^2-n+1

البرهان: توجد نقطة مثل Q لا تقع على الخط l. [A3]



يوجد خط يمر بالنقطتين Q, P1 [A1]

يوجد خط يمر بالنقطتين Q, P2 [A1]

يوجد خط يمر بالنقطتين Q, P3 [A1]

.
.
.

يوجد خط يمر بالنقطتين Q, Pn [A1]

أي انه يوجد n من الخطوط المختلفة

توجد نقطة ثالثة على كل خط من هذه الخطوط ولتكن A1, A2, A3, …..,An [A2]

من النقطة A1 نرسم الخطوط A1P2, A1P3, A1P4, ……,A1Pn [A1]

وهذه الخطوط تقطع الخط QP2 في n-1 من النقاط بالإضافة الى النقطة Q

وبنفس الطريقة نثبت بان الخطوط QP1, QP3, …., QPn تحتوي على n-1 من النقاط بالاضافة الى النقطة Q

∴ عدد النقاط=n(n-1)+1= n^2-n+1

ولكي نثبت بان عدد النقاط هو بالضبط n^2-n+1

نفرض وجود نقطة مختلفة مثل B لا تقع على أي من هذه الخطوط

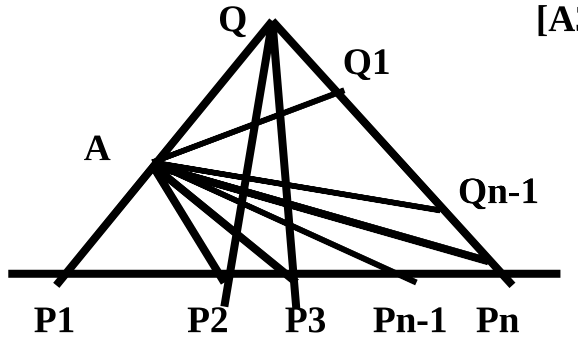
∴ يوجد خط مثل QB [A1]

∴ الخط QB يقطع الخط l في نقطة جديدة هي Pn+1

∴ عدد نقاط الخط l= n+1 وهذا خلاف الفرض

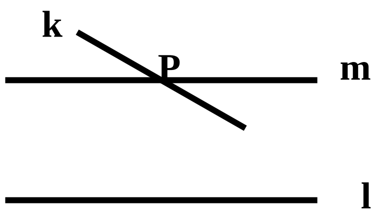
∴ عدد النقاط بالضبط هو n^2-n+1

نتيجة: اذا وجد خط يحتوي بالضبط على n من النقاط المختلفة فان أي خط اخر يحتوي بالضبط على n من النقاط المختلفة.
المفروض: l خط يحتوي بالضبط على n من النقاط المختلفة P1,P2,P3,….,Pn
م. ث.: أي خط اخر في المستوي الاسقاطي يحتوي بالضبط على n من النقاط المختلفة.
البرهان: توجد نقطة مثل Q لا تقع على الخط l. [A3]



يوجد خط يمر بالنقطتين Q, P1 [A1]
يوجد خط يمر بالنقطتين Q, P2 [A1]
يوجد خط يمر بالنقطتين Q, P3 [A1]
.
.
.
يوجد خط يمر بالنقطتين Q, Pn [A1]
توجد نقطة مثل A على الخط QP1 [A2]
يوجد خط يمر بالنقطتين AP2 [A1]
.
.
.
يوجد خط يمر بالنقطتين APn-1 [A1]
الخط AP2 يقطع الخط QPn في نقطة مثل Q1 [A4]
.
.
.
الخط APn-1 يقطع الخط QPn في نقطة مثل Qn-1 [A4]
∴ الخط QPn يحتوي على النقاط Q, Q1, ……, Pn
∴ عدد نقاط الخط QPn هو n من النقاط
و اذا فرضنا بان الخط QPn يحتوي على نقطة اضافية ولتكن Qn فان يوجد خط يمر بالنقطتين A, Qn و يقطع الخط l في نقطة جديدة ولتكن Pn+1 وهذا خلاف الفرض لان عدد نقاط الخط l هو بالضبط n من النقاط
∴ يوجد بالضبط n من النقاط المختلفة على الخط QPn.

ثانيا- المستوي التالفي (الافيني) : Affine Plane
يرمز لهذا المستوي بالرمز α ويحتوي على الكلمات التقنية النقطة والخط ويحتوي على البديهيات التالية:
A1: كل نقطتين مختلفتين يحتويهما خط واحد فقط.
A2: كل خط يحتوي على ثلاثة نقاط مختلفة على الأقل.
A3: توجد على الأقل نقطة ويوجد على الأقل خط بحيث إن النقطة لا تقع على الخط.
A4: اذا كان l خط و P نقطة لا تقع علية فيوجد خط واحد فقط يمر من P ويوازي l.
ملاحظة: الخطوط في المستوي الاسقاطي تكون متقاطعة دائما بينما في المستوي التالفي يمكن ان تكون متوازية او متقاطعة.
مبرهنة ٢: المستقيم القاطع لأحد مستقيمين متوازيين يقطع الأخر.
المفروض: l, m مستقيمين متوازيين و k مستقيم يقطع m في النقطة P
م. ث. : المستقيم k يقطع l
البرهان: سنبرهن بطريقة التناقض

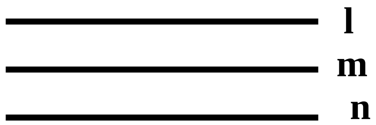


نفرض ان المستقيم k يوازي l
∵ المستقيم m يوازي l [بالفرض]
∴ المستقيمان k, m يوازيان المستقيم l من نقطة P
وهذا غير ممكن حسب [A4]
∴ k لا يوازي l ⟸ k قاطع الى l.

<u>مبرهنة ٣:</u> المستقيمان الموازيان لمستقيم واحد متوازيان.

المفروض: المستقيم l يوازي n والمستقيم l يوازي m

م. ث.: المستقيم n يوازي المستقيم m



البرهان : نبرهن بطريقة التناقض

نفرض ان المستقيم m يقطع المستقيم n في النقطة P

∴ من نقطة واحدة وهي P يوجد مستقيمان موازيان الى l وهذا خلاف [A4]

∴ المستقيم m يوازي المستقيم n.

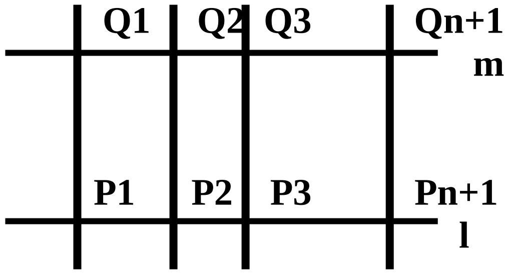
<u>المستوى التالفي المنتهي:</u>

وهو مستوي تالفي يحتوي على عدد منتهي من العناصر (النقاط ، الخطوط).

<u>مبرهنة ٤:</u> اذا وجد خط يحتوي بالضبط على n من النقاط المختلفة فان أي مستقيم اخر يوازيه يحتوي بالضبط على n من النقاط المختلفة.

المفروض: l خط يحتوي بالضبط على n من النقاط المختلفة P1,P2,P3,….,Pn

م. ث.: أي خط يوازي l يحتوي بالضبط على n من النقاط المختلفة.



البرهان: توجد نقطة مثل Q1 لا تقع على الخط l. [A3]

يوجد خط مثل m يمر من النقطة Q1 ويوازي الخط l [A4]

سنبرهن وجود n من النقاط على الخط m

يوجد خط بين النقطتين Q1, P1 [A1]

وبما ان النقطة P2 لا تقع على الخط Q1P1

∴ يوجد خط يمر من النقطة P2 وموازي الى الخط P1Q1 [A4]

ويقطع الخط m في نقطة Q2 [مبرهنة ٢]

وبنفس الطريقة نحصل على النقاط Q3, …. , Qn

∴ الخط m يحتوي على n من النقاط المختلفة Q1, Q2, ….., Qn

ولكي نبرهن أن الخط m يحتوي بالضبط على n من النقاط المختلفة

نفرض وجود نقطة أضافية مثل Qn+1 على الخط m

وبما إن النقطة Qn+1 لا تقع على الخط Q1P1

∴ يوجد خط يمر من النقطة Qn+1 ويوازي الخط Q1P1 ويقطع الخط l في نقطة جديدة مثل Pn+1 [مبرهنة ٢]

∴ أصبح عدد نقاط الخط l هو n+1 وهذا خلاف الفرض

∴ الخط m يحتوي بالضبط على n من النقاط المختلفة

<u>مبرهنة ٥:</u> أذا وجد خط يحتوي بالضبط على n من النقاط المختلفة فان يوجد بالضبط n-1 من الخطوط الموازية له.

المفروض: l خط يحتوي بالضبط على n من النقاط المختلفة P1,P2,P3,….,Pn

م. ث.: يوجد بالضبط n-1 من الخطوط الموازية إلى الخط l

البرهان: توجد نقطة مثل Q1 لا تقع على الخط l. [A3]

يوجد خط يمر بالنقطتين Q1P1 [A1]

يوجد خط يمر بالنقطتين Q1Pn [A1]

من النقطة P2 يمكن رسم خط موازي إلى P1Q1 ويقطع الخط PnQ1 في نقطة Q2 [A4+ مبرهنة ٢]

وبنفس الطريقة نحصل على النقاط Q3, Q4, ….., Qn-1

من النقطة Q1 يوجد خط واحد فقط يوازي l [A4]

وبنفس الطريقة يوجد خط واحد فقط موازي إلى l من كل نقطة من النقاط Q2, Q3, …., Qn-1

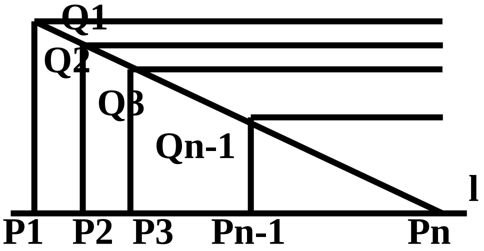
∴ يوجد n-1 من الخطوط الموازية إلى l

ولكي نبرهن انه توجد بالضبط n-1 من الخطوط الموازية إلى l

نفرض وجود خط أضافي موازي إلى l وليكن الخط m

الخط m يقطع الخط Q1Pn في نقطة مثل A [مبرهنة ٢]

من النقطة A التي لا تقع على الخط P1Q1 يمكن رسم خط موازي إلى الخط P1Q1 ويقطع الخط l في نقطة مثل Pn+1 [A4+مبرهنة ٢]



وبذلك أصبح عدد نقاط الخط l هو n+1 وهذا خلاف الفرض

∴ يوجد بالضبط n-1 من الخطوط الموازية إلى l

مبرهنة ٦ : أذا وجد خط يحتوي بالضبط على n من النقاط المختلفة فان أي خط أخر يحتوي بالضبط على n من النقاط المختلفة.

المفروض: l خط يحتوي بالضبط على n من النقاط المختلفة P1,P2,P3,….,Pn

م. ث.: أي خط يحتوي بالضبط على n من النقاط المختلفة

البرهان: نفرض وجود خط أخر مثل m

ففي حالة أن m يوازي l فان m يحتوي بالضبط على n من النقاط المختلفة [مبرهنة ٤]

إما في حالة أن m يقطع l

∴ حسب مبرهنة ٥ فانه يوجد n-1 من الخطوط الموازية إلى l

وبما إن m يقطع l

∴ حسب مبرهنة ٢ فان m يقطع n-1 من الخطوط الموازية إلى l في n-1 من النقاط المختلفة بالإضافة إلى نقطة التقاطع مع l

∴ m يحتوي على n من النقاط المختلفة

وإذا فرضنا أن m يحتوي على نقطة أضافية فانه من هذه النقطة يمكن رسم موازي إلى l وبذلك يصبح عدد الخطوط الموازية إلى l هي n من الخطوط وهذا خلاف لمبرهنة ٥

∴ يوجد بالضبط n من النقاط المختلفة على الخط m

تمارين:

١-أذا وجد خط في المستوي الاسقاطي يحتوي بالضبط على n من النقاط المختلفة برهن على إن:

أ- أي نقطة في النظام يمر بها بالضبط n من الخطوط المختلفة.

ب- يوجد بالضبط n^2-n+1 من الخطوط في النظام.

٢- أذا وجد خط في المستوي ألتالفي يحتوي بالضبط على n من النقاط المختلفة برهن على إن:

أ- يوجد بالضبط n^2 من النقاط المختلفة في النظام.

ب- أي نقطة يمر بها بالضبط n+1 من الخطوط المختلفة.

ت- يوجد بالضبط n(n+1) من الخطوط المختلفة في النظام.

ثالثا- نظام بديهيات فانو : The System of fano

عند إضافة البديهية التالية الى نظام بديهيات المستوي الاسقاطي نحصل على نظام بديهيات فانو (كل خط يحتوي على الأكثر ثلاث نقاط مختلفة).

و بما إن البديهية الثانية تنص على إن : " لكل خط يحتوي على الأقل ثلاث نقاط مختلفة "

∴ يمكن صياغة البديهيتين أعلاه كالأتي: " كل خط يحتوي بالضبط على ثلاث نقاط مختلفة ".

∴ نظام بديهيات فانو هو:

A1: أي نقطتين مختلفتين يحتويهما خط واحد فقط.

A2: كل خط يحتوي بالضبط على ثلاث نقاط مختلفة

A3: توجد على الأقل نقطة ويوجد على الأقل خط بحيث إن النقطة لا تقع على الخط.

A4: كل خطين مختلفين يشتركان في نقطة واحدة على الأقل.

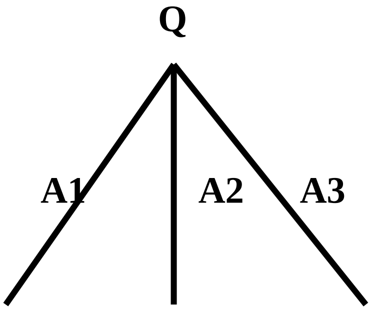
مبرهنة ١ : يحتوي نظام بديهيات فانو على سبعة نقاط فقط.

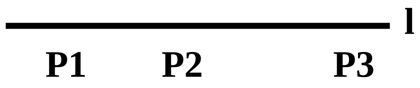
المفروض: نظام بديهيات فانو.

م. ث. : يحتوي نظام بديهيات فانو على سبعة نقاط مختلفة فقط.

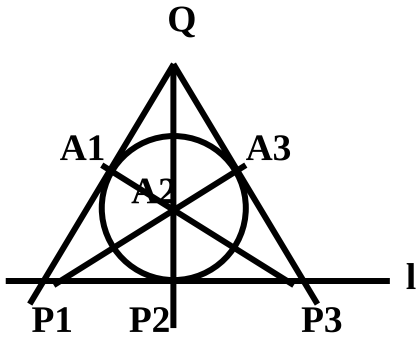
البرهان: يوجد خط مثل l وتوجد نقطة مثل Q لا تقع علية [A3]

يوجد بالضبط ثلاث نقاط مختلفة على الخط l وهي P1, P2, P3 [A2]

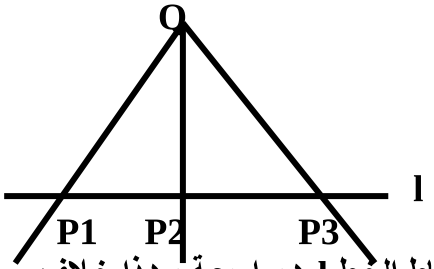


يوجد خط بين النقطتين Q-P1, Q-P2, Q-P3 [A1]
توجد نقاط مثل A1, A2, A3 على الخطوط QP1, QP2, QP3 [A2]


∴ توجد سبعة نقاط مختلفة وهي: Q, P1, P2, P3, A1, A2, A3
نفرض وجود نقطة إضافية، فان هذه النقطة اما ان تقع على احد الخطوط وبذلك يصبح عدد نقاط ذلك الخط أربعه نقاط وهذا خلاف [A2]، او انها لا تقع على أي من الخطوط وبذلك يمكن رسم خط من هذه النقطة يمر بنقطة Q ويقطع l في نقطة رابعة [A4] وهذا خلاف [A2]
∴ يوجد بالضبط سبعة نقاط مختلفة.

<u>مبرهنة ٢ :</u> يحتوي نظام بديهيات فانو على سبعة خطوط فقط.
المفروض: نظام بديهيات فانو.
م. ث. : يوجد سبعة خطوط مختلفة فقط في نظام بديهيات فانو.


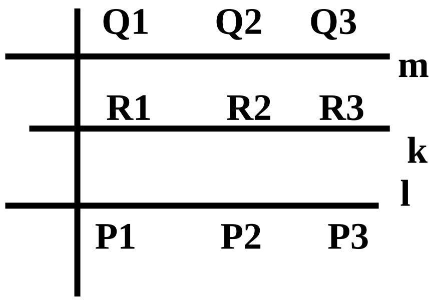
البرهان: يوجد خط مثل l وتوجد نقطة مثل Q لا تقع علية [A3]
يوجد بالضبط ثلاث نقاط مختلفة على الخط l وهي P1, P2, P3 [A2]
يوجد خط بين النقطتين Q-P1, Q-P2, Q-P3 [A1]
توجد نقطة ثالثة مثل A1 على الخطوط QP1 [A2]
توجد نقطة ثالثة مثل A2 على الخطوط QP2 [A2]
توجد نقط ثالثة مثل A3 على الخطوط QP3 [A2]
يوجد خط بين النقطتين A1, A2 والنقطة P3 [A1+A2]
يوجد خط بين النقطتين A2, A3 والنقطة P1 [A1+A2]
يوجد خط بين النقطتين A1, A3 والنقطة P2 [A1+A2]
∴ توجد سبعة خطوط مختلفة في النظام وهي: QP1, QP2, QP3, P1A3, P3A1, P2A3,l
نفرض وجود خط اضافي في النظام، فان هذا الخط سوف يقطع جميع خطوط النظام وبذلك سيكون كل خط يحتوي على الاقل على اربعة نقاط مختلفة وهذا خلاف A2.
∴ يوجد بالضبط سبعة خطوط مختلفة في النظام.

<u>مبرهنة ٣:</u> كل نقطة في نظام بديهيات فانو يمر بها بالضبط ثلاث خطوط.
المفروض: Q نقطة في نظام بديهيات فانو.
م. ث.: النقطة Q يمر بها بالضبط ثلاث خطوط.


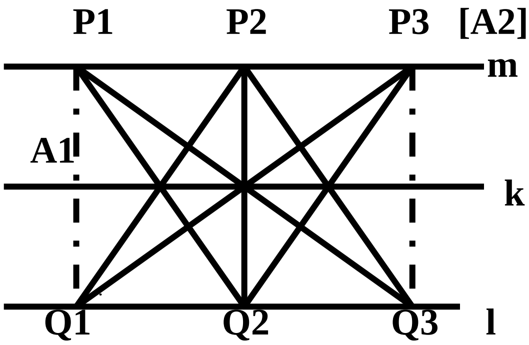
البرهان: يوجد خط مثل l لا يمر بالنقطة Q [A3]
توجد ثلاث نقاط فقط على الخط l وهي P1, P2, P3 [A2]
يوجد خط بين النقطتين Q-P1, Q-P2, Q-P3 [A1]
∴ يوجد ثلاث خطوط تمر من النقطة Q وهي QP1, QP2, QP3
نفرض وجود خط رابع يمر من النقطة Q
∴ هذا الخط سيقطع الخط l في نقطة رابعة [A4] وبذلك سيكون عدد نقاط الخط l هو اربعة وهذا خلاف الفرض
∴ يوجد بالضبط ثلاث خطوط مختلفة تمر من النقطة Q.

رابعا- نظام بديهيات يونك: The System of Young
عند إضافة البديهية التالية الى نظام بديهيات المستوي التالفي نحصل على نظام بديهيات يونك (كل خط يحتوي على الأكثر ثلاث نقاط مختلفة).
و بما إن البديهية الثانية في نظام بديهيات المستوي التالفي تنص على إن : " لكل خط يحتوي على الأقل ثلاث نقاط مختلفة "
∴ يمكن صياغة البديهيتين أعلاه كالأتي: " كل خط يحتوي بالضبط على ثلاث نقاط مختلفة ".
∴ نظام بديهيات يونك هو:
A1: كل نقطتين مختلفتين يحتويهما خط واحد فقط.
A2: كل خط يحتوي بالضبط على ثلاث نقاط مختلفة.
A3: توجد على الأقل نقطة ويوجد على الأقل خط بحيث إن النقطة لا تقع على الخط.

A4: اذا كان l خط و P نقطة لا تقع علية فيوجد خط واحد فقط يمر من P ويوازي l.
وبذلك يكون نظام بديهيات يونك هو نظام هندسة منتهية حيث يحتوي فيه الخط على ثلاث نقاط فقط.
مبرهنة ١: توجد بالضبط تسعه نقاط مختلفة في نظام بديهيات يونك.
المفروض: نظام بديهيات يونك.
م. ث. : يوجد بالضبط تسعه نقاط مختلفة في النظام.
البرهان: يوجد خط مثل l ونقطة مثل Q1 لا تقع علية [A3]
يوجد بالضبط ثلاثة نقاط مختلفة P1, P2, P3 على الخط l [A2]
من النقطة Q1 يوجد خط موازي وليكن m [A4]
∴ يوجد بالضبط ثلاث نقاط مختلفة Q1, Q2, Q3 على الخط m [A2]
يوجد خط بين النقطتين Q1, P1 [A1]
توجد نقطة مثل R1 على الخط Q1P1 [A2]
من النقطة R1 يمكن رسم خط موازي الى l وليكن الخط k [A4]
توجد ثلاث نقاط بالضبط على الخط k وهي R1, R2, R3 [A2]

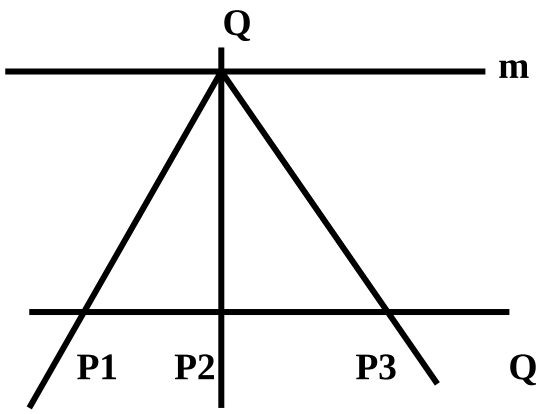


∴ توجد تسعة نقاط مختلفة في النظام هي P1, P2, P3, R1, R2, R3, Q1, Q2, Q3
ولكي نبرهن انه يوجد بالضبط تسعة نقاط مختلفة في النظام.
نفرض وجود نقطة اضافية مثل A في النظام.
فاذا كانت هذه النقطة تقع على احد الخطوط فهذا يعني بان ذلك الخط يحتوي على اربعة نقاط وهذا خلاف [A2]. اما اذا كانت النقطة A لا تقع على أي من الخطوط فانه من هذه النقطة يمكن رسم موازي الى l وليكن l1 [A4] .
وبما ان الخط P1Q1 يقطع الخط l
∴ حسب مبرهنة ٢ فان P1Q1 يقطع الخط l1
∴ اصبح عدد نقاط الخط P1Q1 هو اربعة نقاط وهذا خلاف [A2]
∴ يوجد بالضبط تسعة نقاط مختلفة في النظام.
مبرهنة ٢: يوجد بالضبط اثنى عشر خط مختلف في نظام بديهيات يونك.
المفروض: نظام بديهيات يونك.
م. ث.: يوجد بالضبط اثنى عشر خط مختلف في نظام بديهيات يونك.
البرهان: يوجد خط مثل l ونقطة مثل P1 لا تقع علية [A3]
يوجد بالضبط ثلاث نقاط مختلفة Q1, Q2, Q3 على الخط l [A2]
يوجد خط يمر من P1 ويوازي الخط l وليكن الخط m [A4]
الخط m يحتوي على نقطتين إضافيتين هما P2, P3 [A2]
يوجد خط يمر بالنقطتين P1, Q1 [A1]
يوجد خط يمر بالنقطتين P1, Q2 [A1]
يوجد خط يمر بالنقطتين P1, Q3 [A1]
يوجد خط يمر بالنقطتين P2, Q1 [A1]
يوجد خط يمر بالنقطتين P2, Q2 [A1]
يوجد خط يمر بالنقطتين P2, Q3 [A1]
يوجد خط يمر بالنقطتين P3, Q1 [A1]
يوجد خط يمر بالنقطتين P3, Q2 [A1]
يوجد خط يمر بالنقطتين P3, Q3 [A1]



توجد نقطة مثل A1 على الخط P1Q1 [A2]
من النقطة A1 يمكن رسم خط موازي الى l وليكن الخط k [A4]
∴ يوجد اثني عشر مختلف وهي l, m, k, P1Q1, P1Q2, P1Q3, P2Q1, P2Q2, P2Q3, P3Q1, P3Q2, P3Q3.
ولكي نبرهن انه يوجد بالضبط اثني عشر خط مختلف نفرض وجود خط اضافي في النظام وليكن m1

فاذا كان m1موازي الى l فهذا يعني انه يقطع الخط P1Q1 في نقطة رابعة حسب مبرهنة ٢ وبذلك يكون الخط P1Q1 يحتوي على اربعة نقاط وهذا خلاف [A2].
اما اذا كان m1 قاطع الى l فهذا يعني انه توجد اربعة نقاط على الخط l وهذا ايضا خلاف [A2].
∴ يوجد بالضبط اثني عشر خط مختلف في نظام بديهيات يونك.
مبرهنة ٣: كل نقطة في نظام بديهيات يونك يمر بها بالضبط اربعة خطوط مختلفة.
المفروض: Q نقطة في نظام بديهيات يونك



م. ث. : النقطة Q يمر بها بالضبط اربعة خطوط مختلفة
البرهان: يوجد خط مثل l لا يحتوي على النقطة Q [A3]
توجد ثلاث نقاط بالضبط على الخط l (P1, P2, P3) [A2]
يوجد خط يمر بالنقطتين P1, Q [A1]
يوجد خط يمر بالنقطتين P2, Q [A1]
يوجد خط يمر بالنقطتين P3, Q [A1]
يوجد خط يمر من النقطة Q مثل m ويوازي l [A4]
∴ توجد اربعة خطوط m, P1Q, P2Q, P3Q تمر من النقطة Q
نفرض وجود خط اخر مثل k يمر من النقطة Q
فاما ان يكون الخط k موازي الى l وهذا خلاف [A4]
لانه يكون لدينا خطان موازيان الى l من نقطة واحدة Q
اما اذا كان الخط k قاطع الى l فهذا يعني ان الخط l يحتوي على اربعة نقاط مختلفة وهذا خلاف [A2]
∴ يوجد بالضبط اربعة خطوط مختلفة تمر من النقطة Q.

خواص النظام البديهي: **Properties of Axiomatic System**

تعتبر الصفات التالية صفات اساسية لاختبار النظام البديهي من حيث:
١. الاتساق (الانسجام) Consistency
٢. الاستقلال Independence
٣. التمامية (الاكتمال) Completeness

اولا: الاتساق (Consistency)
وهي صفة اساسية واجب توفرها في النظام البديهي ونعني بالاتساق عدم وجود بديهيتين متناقضتين او مبرهنتين متناقضتين او بديهية تناقض مبرهنة.
تعريف : يقال عن نظام بديهي بانه متسق اذا لم يوجد أي تناقض بين أي بديهيتين او مبرهنتين او بديهية ومبرهنة.

تعريف النموذج Model:
هو ذلك التفسير للنظام البديهي والذي يجعل كافة عبارات النظام البديهي (البديهيات والمبرهنات) جمل صادقة.

طريقة اختبار الاتساق:
اذا امكن كتابة نموذج للنظام فان النظام البديهي متسق و الا فانه نظام بديهي غير متسق لذلك يمثل النموذج طريقة لاختبار اتساق النظام البديهي.

س/ ناقش اتساق بديهيات المستوي الاسقاطي.
ج/ نموذج الاول :
نفرض النقاط تمثل مجموعة من الارقام ..... ,1, 2, 3 والخطوط هي عبارة عن اعمدة من الارقام.
عدد النقاط= $7 = 3^2-3+1 = n^2-n+1$
نموذجين يتكونان من سبعة خطوط وسبعة نقاط.

l1	l2	l3	l4	l5	l6	l7
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	1
4	5	6	7	1	2	3

l1	l2	l3	l4	l5	l6	l7
1	4	2	2	3	3	6
2	1	4	5	4	5	7
3	5	6	7	7	6	1

وهذين النموذجين يبينان بان نظام بديهيات فانو هو نظام متسق.
نموذج الثاني:

l1	l2	l3	l4	l5	l6	l7	l8	l9	l10	l11	l12	l13
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	1
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	1	2	3
10	11	12	13	1	2	3	4	5	6	7	8	9

نموذج يتكون من 13 نقطة و 13 خط
$13 = 4^2-4+1=n^2-n+1$
س/ ناقش اتساق نظام بديهيات المستوي التالفي.
ج/ النموذج الاول:
عدد النقاط = $9= 3^2= n^2$
عدد الخطوط = $12= 3(3+1)= n(n-1)$

l1	l2	l3	l4	l5	l6	l7	l8	l9	l10	l11	l12
1	4	1	1	1	2	2	2	3	3	3	7
2	5	4	5	6	4	5	6	4	5	6	8
3	6	7	8	9	9	7	8	8	9	7	9

هذا النموذج يبين بان نظام بديهيات يونك هو نظام متسق لانه امكن كتابة نموذج للنظام (نموذج يتكون من تسعه نقاط واثني عشر خط).
النموذج الثاني:
عدد النقاط = $16= 4^2= n^2$
عدد الخطوط = $20= 4(4+1)= n(n-1)$

l1	l2	l3	l4	l5	l6	l7	l8	l9	l10	l11	l12	l13	l14	l15	l16	l17	l18	l19	120
1	5	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	9	10
2	6	5	6	7	8	5	6	7	8	5	6	7	8	5	6	7	8	11	12
3	7	9	10	11	12	10	11	12	9	11	15	9	13	14	9	13	10	14	13
4	8	13	14	15	16	16	13	14	15	12	16	10	14	15	12	16	11	16	15

نموذج يتكون من 16 نقطة و 20 خط.
ثانيا: الاستقلال: Independence
يقال عن بديهيه ما في نظام بديهي معين بانها مستقلة اذا لم يكن بالامكان استنتاجها او برهانها بالاعتماد على البديهيات الباقية وفي حالة برهان بديهية ما بالاعتماد على البديهيات الاخرى فان هذه البديهية تكون غير مستقلة ويجب اعتبارها مبرهنة بدلا من ان تكون بديهية ويكون النظام البديهي مستقلا اذا كانت كل بديهية من بديهيات النظام مستقلة.
طريقة اختبار صفة الاستقلال:
نفرض ان النظام البديهي يتكون من البديهيات $A1, A2, \ldots, An$ لاختبار استقلال البديهية Ai حيث ان $i=1, 2, \ldots, n$ نقوم بالخطوتين التاليتين:
١. نثبت بان $A1, A2, \ldots, An$ مجموعة متسقة.
٢. نثبت بان $A1, A2, \ldots, \approx Ai, \ldots, An$ مجموعة متسقة.
س/ ناقش استقلال نظام بديهيات المستوى التالفي.
ج/ ١) استقلال البديهية الاولى.
A1: كل نقطتين مختلفتين يوجد خط واحد فقط يحتويهما.
A1 فرع a: كل نقطتين مختلفتين يوجد على الاقل خط واحد يحتويهما.

A1 فرع b: كل نقطتين مختلفتين يوجد على الاكثر خط واحد يحتويهما.
نفي A1 فرع a: توجد نقطتين مختلفتين ويوجد اقل من خط يحتويهما.
او بصيغة اخرى.
نفي A1 فرع a: توجد نقطتين مختلفتين ولا يوجد خط يحتويهما.
ثم اثبات ان بديهيات المستوي التالفي متسقة أي ان A1, A2, A3, A4 مجموعة متسقة.
نثبت بان نفي A1فرع a ، A1 فرع b ،A2, A3, A4 مجموعة متسقة.
النموذج

1	4
2	5
3	6

∴ A1 فرع a مستقلة.
نفي A1 فرع b: توجد نقطتين مختلفتين ويوجد اكثر من خط يحتويهما.
النموذج

1	4	1	1	1	2	2	2
2	5	4	5	6	4	5	6
3	6	3	3	3	5	6	4

∴ A1 فرع b مستقلة.
∴ A1 مستقلة.

٢) البديهية الثانية:
A2: كل خط يحتوي على ثلاث نقاط مختلفة على الاقل.
نفي A2: يوجد خط يحتوي على اقل من ثلاث نقاط.
نثبت اتساق المجموعة A3, A4 ،نفي A2، A1 .

1	3	1	1	2	2
2	4	3	4	3	4

∴ A2 مستقلة.
٣) البديهية الثالثة:
A3: يوجد على الاقل نقطة ويوجد على الاقل خط بحيث ان النقطة لا تقع على الخط.
نفي A3: لكل خط لا توجد نقطة لا تقع علية.
النموذج:

1
2
3

∴ A3 مستقلة.
٤) البديهية الرابعة:
A4: اذا كان l خط و P نقطة لا تقع علية فيوجد خط واحد فقط يمر من P ويوازي l.
A4 فرع a: اذا كان l خط و P نقطة لا تقع علية فيوجد خط واحد على الاقل يمر من P ويوازي l.
A4 فرع b: اذا كان l خط و P نقطة لا تقع علية فيوجد خط واحد على الاكثر يمر من P ويوازي l.
نفي A4 فرع a: اذا كان l خط وP نقطة لا تقع علية فلا يوجد خط يمر من P ويوازي l.
أي انه لا يوجد حالة توازي (جميع الخطوط متقاطعة)
النموذج:

1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	1
4	5	6	7	1	2	3

∴ A4 فرع a مستقلة.

نفي A4 فرع b: اذا كان l خط و P نقطة لاتقع علية فيوجد على الاقل خطان يمران من P وموازيان الى l.
النموذج:

1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5	6	7	8	9	13	17
2	5	6	7	8	12	5	6	7	8	11	5	6	7	8	10	5	6	7	8	9	6	10	12	9	11	10	14	18
3	9	16	14	10	15	16	10	12	9	13	12	9	11	17	16	11	15	10	12	14	7	15	18	16	14	11	15	19
4	13	11	19	18	17	18	14		15	19	14	19	15	13		17		13	16	18	8	19	18	17		12	16	
							17						18						19									

∴ A4 فرع b مستقلة.
∴ A4 مستقلة.
∴ نظام بديهيات المستوي التالفي هو نظام مستقل.
س/ ناقش استقلال نظام بديهيات المستوى الاسقاطي.
ج/ ١) استقلال البديهية الاولى.
A1: كل نقطتين مختلفتين يوجد خط واحد فقط يحتويهما.
A1 فرع a: كل نقطتين مختلفتين يوجد على الاقل خط واحد يحتويهما.
A1 فرع b: كل نقطتين مختلفتين يوجد على الاكثر خط واحد يحتويهما.

نفي A1 فرع a: توجد نقطتين مختلفتين ويوجد اقل من خط يحتويهما.
او بصيغة اخرى.
نفي A1 فرع a: توجد نقطتين مختلفتين ولا يوجد خط يحتويهما.
ثم اثبات ان بديهيات المستوي الاسقاطي متسقة أي ان A1, A2, A3, A4 مجموعة متسقة.
نثبت بان نفي A1فرع a ، A1 فرع b، A2, A3, A4 مجموعة متسقة.
النموذج

1	4
2	1
3	5

∴ A1 فرع a مستقلة.
نفي A1 فرع b: توجد نقطتين مختلفتين ويوجد اكثر من خط يحتويهما.
النموذج

1	4	2
2	1	4
3	3	1

∴ A1 فرع b مستقلة.
∴ A1 مستقلة.

٢) البديهية الثانية:
A2: كل خط يحتوي على ثلاث نقاط مختلفة على الاقل.
نفي A2: يوجد خط يحتوي على اقل من ثلاث نقاط.
نثبت اتساق المجموعة A3, A4 ،نفي A2، A1 .

1	1	2
2	3	3

∴ A2 مستقلة.
٣) البديهية الثالثة:
A3: يوجد على الاقل نقطة ويوجد على الاقل خط بحيث ان النقطة لا تقع على الخط.
نفي A3: لكل خط لا توجد نقطة لا تقع علية.
النموذج:

1
2
3

∴ A3 مستقلة.
٤) البديهية الرابعة:
A4: كل خطين مختلفين يتقاطعان في نقطة على الاقل.
نفي A4: يوجد خطين مختلفين لا يشتركان بنقطة.
النموذج:

1	4	1	1	1	2	2	2	3	3	3	7
2	5	4	5	6	4	5	6	4	5	6	8
3	6	7	8	9	9	7	8	8	9	7	9

∴ A4 مستقلة.
∴ نظام بديهيات المستوي الاسقاطي هو نظام مستقل.
س/ بين فيما اذا كان النظام البديهي التالي متسق ام لا:
A1: كل خطين مختلفين يتقاطعان في نقطة واحدة فقط. A2: كل نقطة يمر بها خطين فقط.
A3: يوجد بالضبط ستة خطوط.
ج/ كل خط يحتوي على خمسة نقاط مختلفة، ويوجد بالضبط خمس عشر نقطة في النظام، والنظام البديهي متسق.
ملاحظة: صفة الاستقلال صفة غير ضرورية في النظام البديهي لانه في حالة وجود بديهية غير مستقلة نقوم برفع هذه البديهية من البديهيات واضافتها الى المبرهنات.
ثالثا: الاكتمال (التمام) Completeness
يقال عن نظام بديهي معين بانه نظام بديهي تام او كامل اذا لم يكن بالإمكان إضافة بديهية مستقلة الى النظام وفي حاله اضافة بديهية مستقلة الى النظام فان النظام البديهي يكون غير تام.
تعريف: " التقابل المتباين المحافظ على العلاقات one-to-one preserve relation"
ليكن M1 و M2 نموذجين لنظام بديهي معين يحتويان على نفس العدد من العناصر (النقاط، الخطوط)، فاذا كان كل عنصر في النموذج M1 يقابل عنصر واحد فقط في النموذج M2 فيقال بان هنالك تقابل متباين

بين النموذجين M1 وM2 ويطلق على هذا التباين المتقابل بالتباين المتباين المحافظ على العلاقات فاذا كانت كل عبارة صادقة حول عناصر M1 فانها تكون صادقة حول العناصر المقابلة لها في M2.

تعريف: النظام البديهي الفصلي Categorical System Axiomatic

يقال عن نظام بديهي بانه نظام بديهي فصلي اذا كان نموذجين للنظام متشاكلين تقابليا.

تعريف: التشاكل التقابلي Isomorphic

يقال عن نموذجين بنظام بديهي معين بانهما متشاكلين تقابليا (Isomorphic) اذا وجد على الاقل تقابل احادي واحد محافظ على العلاقات بين النموذجين.

مبرهنة: اذا كان كل نموذحين لنظام بديهي متشاكلين تقابليا فان النظام البديهي هو نظام تام.

البرهان: سنبرهن بطريقة التناقض

نفرض ان النظام البديهي غير تام

بما ان النظام البديهي غير تام

$\therefore$ يمكن اضافة بديهية مستقلة ولتكن An الى النظام

و بما ان An بديهية مستقلة فان:

١. المجموعة A1, A2, ..., An مجموعة متسقة.

٢. المجموعة نفي A1, A2, ..., An مجموعة متسقة.

لذلك فانه يوجد نموذجين للمجموعتين ١ و٢ يحتويان على نفس العدد من العناصر

و بما ان النموذجين متشاكلين تقابليا

$\therefore$ يوجد تقابل متباين محافظ على العلاقات بين النموذجين

لذلك العبارتين An و نفي An امل ان تكونا صادقتين او كاذبتين وهذا لا يمكن

$\therefore$ النظام البديهي تام.

طريقة الاختبار:

لكي نثبت بان النظام البديهي تام نثبت اولا بانه نظام فصلي أي ان كل نموذجين في النظام متشاكلين تقابليا وباستخدام المبرهنة السابقة يكون النظام البديهي تام.

مثال: اثبت تشاكل النموذجين M وN.

M

m1	m2	m3	m4	m5	m6	m7	m8	m9	m10	m11	m12
A	D	G	A	B	C	A	B	C	A	B	C
B	E	H	D	E	F	E	F	D	F	D	E
C	F	I	G	I	H	H	G	I	I	H	G

N

n1	n2	n3	n4	n5	n6	n7	n8	n9	n10	n11	n12
1	4	1	1	1	2	2	2	3	3	3	7
2	5	4	5	6	4	5	6	4	5	6	8
3	6	9	7	8	7	8	9	8	9	7	9

ج/ هنالك عدة طرق لوضع تقابل متباين أحادي بين النموذجين M و N ولنأخذ التقابل التالي:

١. A=1, B=2 C=3, D=4, E=5, F=6, G=7, H=8, I=9

تقابل متباين غير محافظ على العلاقات.

$$m4 \in M \quad \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline D \\ \hline G \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 4 \\ \hline 7 \\ \hline \end{array} \notin N$$

٢. افترض التقابل التالي:

A=1, B=2, C=3, D=4, E=5, F=6, G=9, H=7, I=8

$m1 \rightarrow n1$, $m2 \rightarrow n2$, $m3 \rightarrow n12$, $m4 \rightarrow n3$, $m5 \rightarrow n7$, $m6 \rightarrow n11$, $m7 \rightarrow n4$, $m8 \rightarrow n8$, $m9 \rightarrow n9$, $m10 \rightarrow n5$, $m11 \rightarrow n6$, $m12 \rightarrow n10$.

$\therefore$لكل خط في النموذج M يوجد خط في النموذج N يحتوي على عناصر تقابل عناصر الخط m وبذلك يكون هذا التقابل المتباين محافظ على العلاقات وبذلك فان النموذجين Mو N متشاكلين تقابليا.

.٣

A=1, B=2, C=3, D=6, E=4, F=5, G=8, H=9, I=7

$m1 \rightarrow n1$, $m2 \rightarrow n2$, $m3 \rightarrow n12$, $m4 \rightarrow n5$, $m5 \rightarrow n6$, $m6 \rightarrow n10$, $m7 \rightarrow n3$, $m8 \rightarrow n7$, $m9 \rightarrow n11$, $m10 \rightarrow n4$, $m11 \rightarrow n8$, $m12 \rightarrow n9$.

∴لكل خط في النموذج M يوجد خط في النموذج N يحتوي على عناصر تقابل عناصر الخط m وبذلك يكون هذا التقابل المتباين محافظ على العلاقات وبذلك فان النموذجين Mو N متشاكلين تقابليا.

س/ بين أي من الانظمة التالية هي نظام فصلي او تام:

١. نظام بديهيات المستوى الاسقاطي.
٢. نظام بديهيات المستوى التالفي.
٣. نظام بديهيات فانو.
٤. نظام بديهيات يونك.

ج/ بما ان نظام بديهيات المستوى الاسقاطي قد تحقق بنموذجين مختلفين في عدد العناصر (النقاط والخطوط) الاول يحتوي على ٧ نقاط و٧ خطوط والثاني يحتوي على ١٣ نقطة و ١٣ خط فهذا يعني انه لا يمكن ايجاد تشاكل تقابلي بين كل نموذجين في النظام وبذلك فان نظام بديهيات المستوى الاسقاطي غير فصلي. وكذلك نظام بديهيات المستوى التالفي لانه تحقق بنموذجين مختلفين في عدد العناصر الاول يحتوي على ٩ نقاط و ١٢ خط والثاني ١٦ نقطة و ٢٠ خط. اما نظام بديهيات فانو فهو نظام فصلي لان كل نموذج فية يحتوي على ٧ نقاط و٧ خطوط وبالتالي فان كل نموذجين فيه متشاكلين تقابليا. وكذلك نظام بديهيات يونك هو نظام فصلي لان كل نموذج فيه يحتوي على ٩ نقاط و١٢ خط وبالتالي فان لكل نموذجين فيه يمكن ايجاد تقابل متباين محافظ على العلاقات.

∴ نظام بديهيات المستوى الاسقاطي والمستوى التالفي نظامين غير تامين ونظام بديهيات فانو ونظام بديهيات يونك نظامين تامين.

س/ ناقش تشاكل النموذجين التاليين:

M

m1	m2	m3	m4	m5	m6	m7	m8	m9	m10	m11	m12
1	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	5
2	4	6	8	4	5	7	4	5	6	7	6
3	5	7	9	6	8	9	9	7	8	8	9

N

n1	n2	n3	n4	n5	n6	n7	n8	n9	n10	n11	n12
1	1	1	1	2	2	2	3	3	4	4	6
2	3	5	7	3	5	7	4	5	5	7	8
4	6	8	9	9	6	8	8	7	9	6	9

نفرض التقابل التالي:

1=1, 2=2, 3=4, 4=8, 5=5, 6=7, 7=9, 8=6, 9=3

$m1 \rightarrow n1$, $m2 \rightarrow n3$, $m3 \rightarrow n4$, $m4 \rightarrow n2$, $m5 \rightarrow n7$, $m6 \rightarrow n6$, $m7 \rightarrow n5$, $m8 \rightarrow n8$, $m9 \rightarrow n10$, $m10 \rightarrow n11$, $m11 \rightarrow n12$, $m12 \rightarrow n9$.

∴ النموذجين M و N متشاكلين تقابليا.

الهندسة الاقليدية

يعتبر كتاب الأصول لإقليدس (Elements) اول كتاب في الرياضيات مبني على نظام البديهيات (Axiomatic System) ظهر قبل اكثر من الفي سنة. لقد بنى اقليدس اصولة على التاريف والبديهيات في براهينه لان أي اثبات منطقي لابد وان يرتكز على نقطة ابتداء مفروضة بغير مناقشة. قدم اقليدس في كتابة هذا ٢٣ تعريف و ١٠ بديهيات وتعاريف عامة و٤٨ مبرهنة وكما يلي:

<u>التعاريف:</u> Definitions

لقد بدا اقليدس بكتابة ثلاثة وعشرون تعريف والتي هي:-

١. النقطة: هي التي ليس لها ابعاد.
٢. المستقيم: هو طول بدون عرض.
٣. نهايات المستقيم: هي نقاط.
٤. الخط المستقيم: هو الخط الذي يقع كليا على نقاطة.
٥. السطح: هو الذي له طول وعرض فقط.
٦. نهايات السطوح: هي خطوط.
٧. السطح المستوي: هو ذلك السطح الذي يقع كليا على مستقيماته.
٨. الزاوية المستوية: هي ميلان احد مستقيمين متلاقين عن الاخر في مستوي ولا يقعان على مستقيم واحد.
٩. واذا وقع المستقيمان على مستقيم واحد فالزاوية تسمى زاوية مستقيمة.
١٠. اذا رسم مستقيم يصنع مع مستقيم اخر زاويتين متجاورتين متساويتين فان كلا من الزاويتين المتساويتين قائمة والمستقيم المرسوم يكون عموديا على الاخر.
١١. الزاوية المنفرجة هي الزاوية التي تكون اكبر من قائمة.
١٢. الزاوية الحادة هي الزاوية التي تكون اصغر من قائمة.
١٣. حدود الشيء هي اطرافه.
١٤. الشكل هو كل ما يكون ضمن الحدود.
١٥. الدائرة: هي شكل مستوي محاط بخط بحيث ان كل المستقيمات الواقعة على الخط من نقطة واحدة مشتركة داخل الشكل، تكون متساوية فيما بينها.
١٦. والنقطة المعينة في التعريف (١٥) تسمى مركز الدائرة.
١٧. قطر الدائرة: هو أي مستقيم مرسوم من المركز ومنتهي في الاتجاهين بمحيط الدائرة، وهذا الخط المستقيم ينصف الدائرة.
١٨. نصف الدائرة: هو الشكل المحاط بالقطر والمحيط المقطوع به، ومركز نصف الدائرة هو مركز الدائرة نفسه.
١٩. الاشكال المستوية: هي الاشكال المحاطة بخطوط مستقيمة والشكل الثلاثي محاط بثلاثة مستقيمات والشكل الرباعي باربعة مستقيمات وكثير الاضلاع محاط باكثر من اربعة مستقيمات.
٢٠. من الاشكال الثلاثية المثلث المتساوي الاضلاع وهو الذي تكون اضلاعة الثلاثة متساوية، والمثلث المتساوي الساقين فيه ضلعين فقط متساويين، والمثلث المختلف الاضلاع هو الذي تكون اضلاعة مختلفة.
٢١. واضافة الى ذلك، من الاشكال الثلاثية، المثلث القائم الزاوية الذي فيه زاوية قائمة واحدة، والمثلث المنفرج الزاوية الذي فيه زاوية منفرجة واحدة، والمثلث الحاد الزوايا هو الذي تكون زواياة حادة.
٢٢. من الاشكال الرباعية المربع الذي تكون اضلاعة متساوية وزواياه قوائم، والمستطيل الذي زواياه قوائم واضلاعة غير متساوية والمعين الذي اضلاعة متساوية وزواياه ليست قوائم، والمتوازي الاضلاع الذي فية زوايله المتقابلة متساوية واضلاعة المتقابلة متساوية، ولكن ليس متساوي الاضلاع و لا قائم الزوايا، والاشكال الرباعية الاخرى من غير هذه تسمى منحرفة.
٢٣. الخطوط المستقيمة المتوازية: هي الخطوط المستقيمة التي تقع في مستوي واحد والتي لا تلتقي مهما امتدت في أي الاتجاهين.

الفرضيات: The Postulates

بعد ان وضع اقليدس تلك التعاريف بدا بكتابة عشرة فرضيات وقسمها الى مجموعتين سمى المجموعة الاولى بالمفاهيم العامة والمجموعة الثانية بالبديهيات.

اولا:- المفاهيم العامة: The Common notions

١. الاشياء المساوية لشيء واحد متساوية فيما بينها.
٢. اذا اضيفت كميات متساوية الى اخرى متساوية تكون النتائج متساوية.
٣. اذا طرحت مقادير متساوية من اخرى متساوية تكون البواقي متساوية.
٤. الاشياء المتطابقة متساوية فيما بينها.
٥. الكل اكبر من الجزء.

ثانيا:- البديهيات: **Axioms**

١. من الممكن الوصل بين أي نقطتين بخط مستقيم.
٢. يمكن مد قطعة مستقيم من جهتيها الى غير حد.
٣. يمكن رسم دائرة اذا علم مركزها ونصف قطرها.
٤. جميع الزوايا القوائم متساوية.
٥. اذا قطع مستقيمان بمستقيم ثالث بحيث كان مجموع الزاويتين الداخليتين الواقعتين على جهه واحدة من القاطع اقل من قائمتين، فان المستقيمان، اذا مدا بغير حد، يتلاقيان في تلك الجهة من القاطع التي يكون فيها مجموع الزاويتين اقل من قائمتين. وتسمى هذه البديهية بديهية التوازي لاقليدس.

تعتبر البديهية الخامسة لاقليدس من البديهيات المهمة والتي كانت نقطة البداية في دراسة الهندسة اللااقليدية حيث كانت هذه البديهية مثار جدل علماء الرياضيات والسبب في ذلك هو الشك في كون هذه البديهية مبرهنة لذلك حاول كثير من العلماء برهنة هذه البديهية بالاعتماد على البديهيات الأربعة الا ان هذه المحاولات كانت فاشلة لان البراهين كانت تعتمد على عبارات تكافئ البديهية الخامسة. ان السبب في الاعتقاد في كون البديهية الخامسة مبرهنة هو:

١- طول البديهية الخامسة مقارنة بالبديهيات الاربعة.
٢- لم يستخدم اقليدس البديهية الخامسة في برهان اول ٢٨ مبرهنة واستخدامها في برهان مبرهنة ٢٩ والتي بعدها.

المبرهنات: **Theorem**

بعد ان قدم اقليدس التعاريف والبديهيات بدا في اشتقاق نظرياتة الثمان والاربعون واحدة بعد الاخرى، ولسبب ما اراد اقليدس ان يعرف الى أي حد يستطيع ان يسير بالمفاهيم والبديهيات الاربعة من دون ان يستخدم البديهية الخامسة (لا يمكن معرفة هذا السبب اذ قد يكون نفسيا او منطقيا او فلسفيا). لقد استطاع اقليدس اشتقاق الثماني وعشرون نظرية الاولى فقط بدون استخدام البديهية الخامسة. (حيث استخدم اقليدس البديهية الخامسة لاول مرة في برهان نظرية (٢٩)). والنظريات الثمان والاربعون والتي بعضها عمليات (مرتبة كما ذكرت في كتاب الاصول) هي:-

١. كيفية رسم مثلث متساوي الاضلاع على مستقيم معلوم محدود الطول.
٢. كيفية رسم مستقيم من نقطة معلومة طوله يساوي طول مستقيم معلوم.
٣. من اكبر مستقيمين معلومين كيفية قطع جزء يساوي اصغر المستقيمين.
٤. اذا ساوى ضلعان والزاوية المحصورة بينهما من مثلث ضلعين والزاوية المحصورة بينهما من مثلث اخر. يتساوى المثلثان وتساوي الزوايا الباقية والضلع من احدهما نظائرها من الاخر.
٥. في المثلث المتساوي الساقين تتساوى زوايا القاعدة واذا مد الضلعان المتساويان فالزاويتان الواقعتان تحت القاعدة تتساويان ايضا.
٦. اذا تساوت زاويتان في مثلث فالضلعان المقابلان لهما متساويان.
٧. اذا رسم مستقيمان من طرفي مستقيم معلوم وتلاقيا في نقطة هناك لا يمكن رسم مستقيمين اخرين يساويان المستقيمين على التوالي، وفي طرفي المستقيم المعلوم نفسه ومتلاقيان في نقطة اخرى في الجهة نفسها من المستقيم المعلم.
٨. اذا ساوى ضلعا مثلث ضلعي مثلث اخر على التوالي وتساوت قاعديهما تساوت زواياهما على التناظر.
٩. كيفية تنصيف زاوية مستوية.
١٠. كيفية تنصيف مستقيم معلوم محدود الطول.
١١. كيفية اقامة عمود على مستقيم معلوم من نقطة مفروضة عليه.
١٢. كيفية رسم مستقيم عمود على مستقيم معلوم من نقطة خارجة عنة.
١٣. اذا لاقى مستقيم مستقيما معلوم، فانه يصنع اما زاويتين قائمتين او زاويتين مجموعهما يساوي زاويتين قائمتين.
١٤. اذا رسم من نقطة معلومة على مستقيم معلوم مستقيمين وعلى طرفية المختلفين وكان مجموع الزاويتين المتجاورتين يساوي زاويتين قائمتين فالمستقيمان يقعان على مستقيم واحد.
١٥. اذا تقاطع مستقيمان فالزاويتان المتقابلتان بالراس متساويتان.

١٦. اذا مد احد اضلاع مثلث فالزاوية الخارجية تكون اكبر من كل من الزاويتين الداخليتين المقابلتين لهما.
١٧. مجموع زاويتين في مثلث كيفما اتخذت اقل من زاويتين قائمتين.
١٨. في أي مثلث يكون اكبر الاضلاع مقابلا لاكبر الزوايا.
١٩. في أي مثلث تكون الزاوية الكبرى مقابلة لاكبر الاضلاع.
٢٠. مجموع أي ضلعين في مثلث اكبر من ضلعه الثالث.
٢١. اذا رسم من طرفي قاعدة مثلث، مستقيمان وتلاقيا في نقطة داخل المثلث فالمستقيمان اصغر من ضلعي المثلث، ويحصران زاوية اكبر من الزاوية المحصورة بين ضلعي المثلث.
٢٢. كيفية رسم مثلث اضلاعه تساوي ثلاثة مستقيمات معلومة. ومن الضروري ان يكون مجموع أي زوج من المستقيمات اكبر من المستقيم الثالث.
٢٣. من نقطة على مستقيم معلوم، كيفية رسم زاوية مستوية تساوي زاوية معلومة.
٢٤. اذا ساوى ضلعان في مثلث ضلعين في مثلث اخر على التوالي وكانت الزاوية المحصورة بين الضلعين في المثلث الاول اكبر من نظيرتها في المثلث الثاني فان الضلع الثالث في المثلث الاول اكبر من الضلع الثالث في المثلث الثاني.
٢٥. اذا ساوى ضلعا مثلث ضلعي مثلث اخر على التوالي وكانت الضلع الثالث في المثلث الاول اكبر من الضلع الثالث في المثلث الثاني فالزاوي المحصورة بين الضلعين المتساويين في المثلث الاول اكبر من الزاوي المحصورة بين الضلعين المتساويين في المثلث الثاني.
٢٦. اذا ساوت زاويتان وضلع من مثلث زاويتين وضلع مناظر من مثلث اخر على التوالي فالضلعان الاخران والزاوية الثالثة في المثلث الاول تساوي الضلعين الاخرين والزاوية الثالثة في المثلث الثاني.
٢٧. اذا قطع مستقيم مستقيمين وكانت الزاويتان المتبادلتان متساويتين يكون المستقيمان متوازيين.
٢٨. اذا قطع مستقيم مستقيمين وكانت الزاوية الخارجية تساوي الزاوية الداخلية والمقابلة لها في نفس الجهة من القاطع، او كان مجموع الزاويتين الداخليتين الواقعتين على جهة واحدة من القاطع يساوي قائمتين، يكون المستقيمان متوازيين.
٢٩. اذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فان الزاويتين الداخليتين المتبادلتين متساويتان والزاوية الخارجية تساوي الزاوية الداخلية المقابلة لها وفي نفس الجهة من القاطع وكذلك مجموع الزاويتين الداخليتين الواقعتين على جهة واحدة من القاطع يساوي قائمتين.
٣٠. المستقيمان الموازيان لمستقيم واحد متوازيان.
٣١. من نقطة معلومة يمكن رسم مستقيم يوازي مستقيما معلوما.
٣٢. اذا مد احد اضلاع مثلث فالزاوية الخارجية تساوي مجموع الزاويتين الداخليتين المقابلتين لها، ومجموع الزوايا الثلاث للمثلث يساوي زاويتين قائمتين.
٣٣. المستقيمان الواصلان بين نهايتي مستقيمين متساويين ومتوازيين يكونان متساويين ومتوازيين.
٣٤. تتساوى الاضلاع المتقابلة والزوايا المتقابلة في متوازي الاضلاع والقطر ينصف مساحتة.
٣٥. متوازيات الاضلاع المحصورة بين مستقيمين متوازيين والمشتركة بالقاعدة ييساوى بالمساحة.
٣٦. متوازيات الاضلاع التي تتساوى بالقاعدة والمحصورة بين المتوازيين نفسهما تتساوى مساحتهما.
٣٧. المثلثات المرسومة على القاعدة نفسها والمحصورة بين المتوازيين نفسهما تتساوى مساحتهما.
٣٨. المثلثات المرسومة على قواعد متساوية والمحصورة بين المتوازيين نفسهما تتساوى مساحتهما.
٣٩. المثلثات المتساوية بالمساحة. والمرسومة على القاعدة نفسها وفي الجهة نفسها من القاعدة تنحصر بين مستقيمات متوازية.
٤٠. المثلثات المتساوية المساحة. والمرسومة على قواعد متساوية الواقعة في مستقيم واحد وفي الجهة نفسها من المستقيم تنحصر بين مستقيمات متوازية.
٤١. مساحة المثلث تساوي نصف مساحة متوازي الاضلاع المشترك معه بالقاعدة والمحصورة معه بين المتوازيين نفسهما.
٤٢. كيفية رسم متوازي الاضلاع داخل زاوية مساحته تساوي مساحة مثلث معلوم.
٤٣. في أي متوازي اضلاع تكون متوازيات الاضلاع المرسومة حول قطره متساوية بالمساحة.

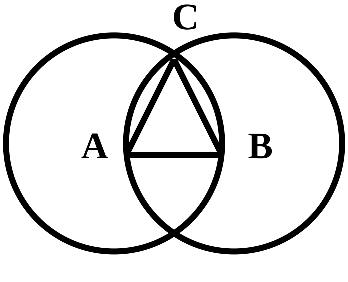
٤٤. كيفية رسم متوازي الاضلاع داخل زاوية معلومة واحد اضلاعة يساوي مستقيما معلوما ومساحته تساوي مساحة مثلث معلوم.
٤٥. كيفية رسم متوازي الأضلاع داخل زاوية معلومة مساحتها تساوي مساحة شكل مستوي.
٤٦. كيفية رسم مربع على مستقيم معلوم.
٤٧. في المثلث القائم الزاوية، مساحة المربع المنشأ على الوتر تساوي مجموع مساحتي المربعين المنشأين على الضلعين القائمين.
٤٨. اذا كانت مساحة المربع المنشأ على ضلع المثلث، تساوي مجموع مساحتي المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين، فالزاوية المحصورة بين الضلعين الآخرين قائمة.

بعض مواطن الضعف في نظام إقليدس:-

١. خلو النظام البديهي لاقليدس من الكلمات الاولية حيث ان اقليدس يعرف النقطة بانها لا بعد لها والمستقيم هو طول بدون عرض أي انه يعرف الكلمات بواسطة كلمات اخرى اصعب من الكلمة نفسها لذلك الانتقاد الذي وجهة للهندسة الاقليدية هو خلوها من الكلمات التقنية الاولية.
٢. استخدم اقليدس فرضيات لم يشير اليها في نظامه لذلك سميت ببديهيات ضمنية وهي " بديهية البين، بديهية باخ، بديهية الاستمرارية، وحدانية المستقيم، لانهائية المستقيم، بديهية الترتيب الخطي".
٣. استعمل اقليدس كلمة يساوي للاشارة الى التطابق فكان يقول " تساوي مثلثين بينما الصحيح تطابق مثلثين".
٤. اعتمد على الرسم لبرهان مبرهناتة وليس مجرد توضيح للبرهان واستنتج من الرسم فرضيات لم يذكرها في نظامه.
٥. ان نظام الهندسة عند اقليدس هو نظام غير كامل حيث يمكن اضافة بديهيات مستقلة الى النظام وبقاء النظام متناسق ونوضح ذلك بالفرضية التالية: "الخط الواصل بين نقطة داخل دائرة ونقطة خارجها يقطع الدائرة".

بعض المبرهنات مع البرهان كما وضعها اقليدس:

<u>مبرهنة ١ :-</u> كيفية رسم مثلث متساوي الاضلاع على مستقيم معلوم ومنته في الطول.

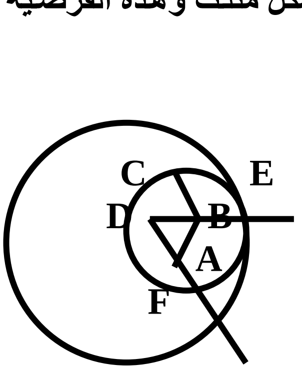


المفروض: AB مستقيم معلوم ومنته في الطول.
م. ث. : رسم مثلث متساوي الاضلاع على المستقيم AB.
البرهان: نرسم دائرة مركزها A ونصف قطرها AB. [A3]
نرسم دائرة مركزها B ونصف قطرها BA [A3]
∴ الدائرتان متقاطعتان في النقطة C
نرسم مستقيم بين النقطتين A وC ونرسم مستقيم بين النقطتين B وC [A1]
∵ AC=AB أنصاف أقطار دائرة واحدة (تعريف الدائرة)
BC=AB أنصاف أقطار دائرة واحدة (تعريف الدائرة)
∴ AB=AC=BC (مفاهيم عامة ١)
∴ المثلث ABC متساوي الاضلاع.

<u>الانتقاد:</u>

١. افترض اقليدس وجود نقطة تقاطع للدائرتين ولم يبرهن ذلك وكذلك لم يبرهن ان نقطة تقاطع الدائرتين لا تقع على المستقيم AB.
٢. استخدم مفهوم وحدانية المستقيم المرسوم بين نقطتين دون ان يشير إليه في البديهيات.
٣. استخدم فرضية ضمنية وهي ان كل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تشكل مثلث وهذه الفرضية لا يمكن اثباتها او نفيها باستخدام البديهيات.

<u>مبرهنة ٢ :-</u> كيفية رسم مستقيم من نقطة معلومة طوله يساوي طول مستقيم معلوم.



المفروض: BC مستقيم معلوم، A نقطة معلومة.
م. ث.: رسم مستقيم طوله يساوي BC ويمر من نقطة A.
البرهان: نرسم مستقيم بين النقطتين A و B [A1]
∴ يمكن رسم مثلث متساوي الاضلاع DAB (مبرهنة ١)
نرسم دائرة مركزها B ونصف قطرها BC [A3]

نمد المستقيم DB فيقطع الدائرة في نقطة E [A2] G
نرسم دائرة مركزها D ونصف قطرها DE [A3]
نمد المستقيم DA فيقطع الدائرة الاولى في نقطة F والدائرة الثانية في نقطة G [A2]
∵ DE=DG أنصاف أقطار دائرة
وان DB=DA ضلعين في مثلث متساوي الاضلاع
∴ AG=BE (مفاهيم عامة ٣)
∵ BC=BE أنصاف أقطار دائرة
∴ BC=AG (مفاهيم عامة ١)
المستقيم AG يمر من نقطة A وطوله يساوي طول المستقيم BC.

الانتقاد:-

أستخدم اقليدس الفرضية (المستقيم الواصل بين نقطة داخل دائرة ونقطة خارجها يقطع الدائرة) وهذه الفرضية لا يمكن برهانها بالاعتماد على بديهيات اقليدس ولكن يمكن استنتاجها من الرسم.

مبرهنة ٤:- اذا ساوى ضلعان والزاوية المحصورة بينهما من مثلث ضلعين والزاوية المحصورة بينهما من مثلث اخر. يتساوى المثلثان وتساوي الزوايا الباقية والضلع من احدهما نظائرها من الاخر.

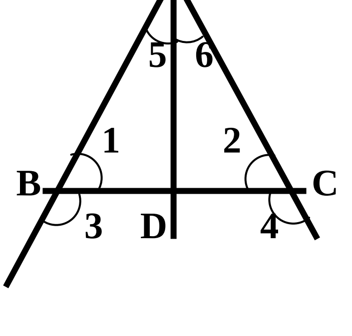
المفروض: ABC مثلث، DEF مثلث اخر فيهما DE=AB ،DF=AC ، $\angle A=\angle D$.
م. ث.: المثلث ABC=المثلث DEF ،BC=EF ، $\angle E=\angle B, \angle F=\angle C$.
البرهان: نضع المثلث ABC على المثلث DEF بحيث ان الراس A يقع على الراس D والضلع AB على الضلع DE
∵ AB=DE (بالفرض)
∴ النقطة E تنطبق على النقطة B
∵ $\angle A=\angle D$ (بالفرض)
∴ الضلع AC يقع على الضلع DF
∵ DF=AC (بالفرض)
∴ النقطة F تنطبق على النقطة C
∵لنقطة E تنطبق على النقطة B و النقطة F تنطبق على النقطة C
∴ الضلع BC ينطبق على الضلع EF
∴BC=EF ، $\angle E=\angle B, \angle F=\angle C$
والمثلث ABC=المثلث DEF

الانتقاد:-

أستخدم اقليدس في برهانه طريقة نقل الاشكال كطريقة للبرهان وهذا غير صحيح اذ لا يمكن دائما بقاء الاشكال على حالها دون ان تتغير عند نقلها.

مبرهنة ٥:- في المثلث المتساوي الساقين تتساوى زوايا القاعدة واذا مد الضلعان المتساويان فالزاويتان الواقعتان تحت القاعدة تتساويان أيضا.

المفروض: ABC مثلث فيه AB=AC
م. ث.: $\angle 1=\angle 2, \angle 3=\angle 4$
البرهان: ننصف الزاوية A بحيث يقطع المستقيم المنصف الضلع BC في نقطة D
في المثلثين ABD، ADC فيهما:
AC=AB (بالفرض)
الضلع AD مشترك
$\angle 5=\angle 6$ (بالتنصيف)
$\angle 1=\angle 2$ (مبرهنة ٤)
$\angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 4$ (زاوية مستقيمة)
$\angle 3=\angle 4$ (مفاهيم عامة ٣)



الانتقاد:-

١. فرض ان منصف الزاوية يكون وحيدا من دون ان يذكر ذلك في نظامه أي انها فرضية ضمنية.
٢. فرض ان منصف الزاوية من مثلث يقطع الضلع المقابل له وهي ليست ضمن فرضياته او براهينه.

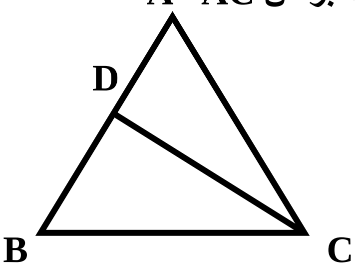
<u>مبرهنة ٦:-</u> اذا تساوت زاويتان في مثلث فالضلعان المقابلان لهما متساويان.

المفروض: ABC مثلث فيه $\angle B = \angle C$

م. ث.: AC=AB

البرهان:

اذا لم يكن AC=AB فانه اما يكون اكبر منه او اصغر منه وليكن AB اكبر من AC



∴ توجد نقطة مثل D بحيث ان AC=DB (مبرهنة ٣)

نصل بين النقطتين D و C [A1]

في المثلثين ABC و BDC

BC ضلع مشترك

AC=BD (بالعمل)

$\angle B = \angle C$ بالفرض

∴ المثلث ABC=المثلث BDC (مبرهنة ٤)

وهذا لا يمكن لان المثلث ABC اكبر من المثلث BDC وبنفس الطريقة نثبت التناقض AB اصغر من AC

∴ AC=AB

<u>الانتقاد:</u>

١. اعتمد على الرسم في ملاحظة كون المثلث ABC اكبر من المثلث BDC ولا يعتمد على احد فرضياته او مبرهناته.
٢. اعتمد اقليدس على فكرة التقسيم الثلاثي لاطوال الاضلاع أي اما AB=AC او AB اكبر من AC او AB اصغر من AC وهذه الفكرة ليست ضمن المفاهيم الاولية او البديهيات او المبرهنات.

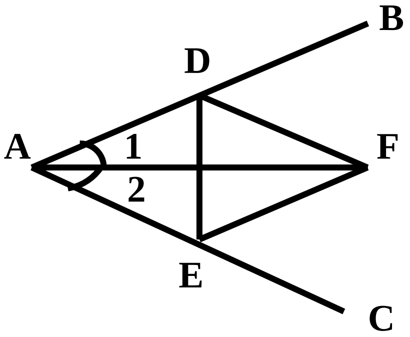
<u>مبرهنة ٩:</u> كيفية تنصيف زاوية مستوية.

المفروض: BAC زاوية

م. ث.: تنصيف زاوية BAC

البرهان:

لتكن D نقطة على الضلع AB ، توجد نقطة مثل E على الضلع AC بحيث ان AE=AD (مبرهنة ٣)



نصل بين النقطتين E و D [A1]

∴ يوجد مثلث متساوي الاضلاع DEF (مبرهنة ١)

نصل بين النقطتين Fو A [A1]

في المثلثين ADF و AEF

AE=AD بالعمل

EF=DF ضلعين في مثلث متساوي الاضلاع

AF ضلع مشترك

∴ المثلث ADF = المثلث AEF (مبرهنة ٨)

∴ $\angle 2 = \angle 1$

<u>الانتقاد:-</u>

اعتمد اقليدس على الرسم بتحديد كون المستقيم AF يقع داخل زاوية A و لم يعطي برهان منطقي لهذه الحالة.

<u>مبرهنة ١٠:</u> كيفية تنصيف قطعة مستقيم (مستقيم طوله منتهي).

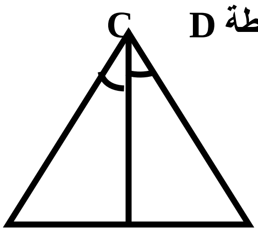
المفروض: AB قطعة مستقيم

م. ث.: تنصيف قطعة المستقيم AB

البرهان: يوجد مثلث متساوي الأضلاع ABC (مبرهنة ١)

ننصف الزاوية C (مبرهنة ٩) بحيث يقطع هذا المنصف الضلع AB في النقطة D

في المثلثين ADC و BDC



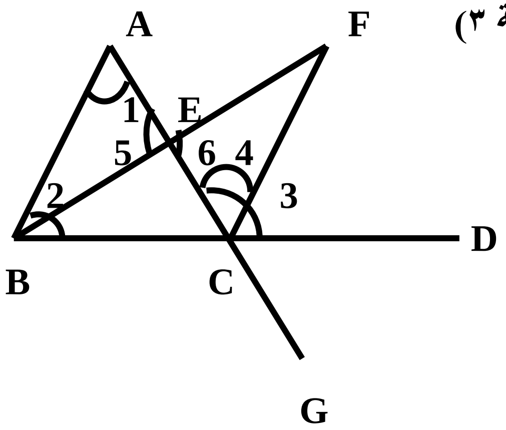
BC=AC ضلعين في مثلث متساوي الأضلاع **1 2**
DC ضلع مشترك
$\angle 1 = \angle 2$ بالتنصيف
∴ المثلث ADC = المثلث BDC (مبرهنة ٤) **A D B**
∴ AD=BD

<u>الانتقاد:</u>

افترض اقليدس ان المنصف لزاوية C يقطع الضلع AB في نقطة D وهذا لا يمكن برهانه لا من خلال الرسم وكذلك افترض ان النقطة D تقع بين النقطتين A و B أي انه استخدم بديهية البين في نظامه ولم يشر اليها.

<u>مبرهنة ١٦:</u> اذا مد احد اضلاع مثلث فالزاوية الخارجية تكون اكبر من الزاويتين الداخليتين المقابلتين لها.

المفروض: ABC مثلث وقد مد الضلع BC الى النقطة D
م. ث.: $\angle 1 < \angle 3$ و $\angle 2 < \angle 3$
البرهان: لتكن E منتصف AC (مبرهنة ١٠)
نصل بين النقطتين E و B [A1]
نمد قطعة المستقيم BE الى F [A2] بحيث BE=EF (مبرهنة ٣)
نصل بين النقطتين F و C [A1]
في المثلثين EFC و EAB فيهما:
AE=EC، BE=EF (بالعمل)
$\angle 5 = \angle 6$ (زاويتان راسيتان) (مبرهنة ١٥)
∴ المثلث EFC= المثلث EAB (مبرهنة ٤)
$\angle 1 = \angle 4$ (مبرهنة ٤)
و لكن $\angle 4 < \angle 3$
∴ $\angle 1 < \angle 3$
وبنفس الطريقة نمد المستقيم AC الى G [A2]
و أذا نصفنا BC و $\angle BCG = \angle ACD$ (مبرهنة ١٥)
∴ من الممكن برهان ان $\angle 2 < \angle 3$



<u>الانتقاد:</u>

1. **لم يبرهن إن النقطة F تقع في داخل $\angle ACD$ ومنه يستنتج بان $\angle ACF$ هي اصغر من $\angle ACD$.**
2. **لقد ذكر إقليدس في البديهية الثانية على انه يمكن مد قطعة مستقيم من جهتيها الى غير حد. ان هذا لا يؤدي إلى أن طول المستقيم غير منته. لقد أهمل إقليدس هذه النقطة إلى عام ١٨٥٤م حينما ميز ريمان بين المستقيم الذي يكون محددا وبين المستقيم الذي يكون طوله منته. في حين أن إقليدس كان يستخدم هذه المصطلحات بصورة متساوية مثل غير محدود هو مفهوم امتداد.**

تقويم هندسة إقليدس
أسس الهندسة

قدم عالم الرياضيات الألماني دافيد هلبرت نظاما بديهيا متكاملا الذي منه نستنتج الهندسة الاقليدية. لقد صحح الاخطاء والعيوب التي رافقت اعمال اقليدس. نبدا نظامنا هذا بكلمات اولية تقنية تدعى نقاط التي يرمز لها بالرمز .... ,A, B, C والمستقيمات يرمز لها بالرمز .... ,l, m, n

<u>١- بديهيات الوقوع والوجود:</u>
بديهية ١ : لكل نقطتين مختلفتين معلومتين، يوجد مستقيم واحد فقط يحتويهما.
بديهية ٢ : كل مستقيم يحتوي على نقطتين في الاقل.
بديهية ٣ : لكل مستقيم معلوم، توجد في الاقل نقطة واحدة لاتنتمي اليه.

بديهية ٤ : يوجد في الاقل مستقيم واحد.

<u>تعريف:</u> تكون المجموعتان متساويتان اذا وفقط اذا احتوتا بالضبط على نفس العناصر.

<u>مبرهنة ١ :</u> توجد في الاقل ثلاث نقاط مختلفة في النظام.

المفروض: نظام اقليدس (المعدل)

م. ث. : يوجد على الاقل ثلاث نقاط مختلفة.

البرهان: يوجد مستقيم مثل l (بديهية ٤)

∴ المستقيم l يحتوي على نقطتين مثل A و B (بديهية ٢)

توجد نقطة مثل C لا تنتمي الى l (بديهية ٣)

∴ يوجد على الاقل ثلاث نقاط مختلفة A, B, C.

<u>مبرهنة ٢ :</u> أي مستقيمين مختلفين يشتركان في نقطة واحدة على الاكثر.

المفروض: l و m مستقيمين مختلفين.

م. ث.: l و m يشتركان في نقطة واحدة على الاكثر.

البرهان: نفرض ان l و m يشتركان في نقطتين مثل A, B

ولكن هذا يناقض بديهية ١

∴ l و m يشتركان في نقطة واحدة على الاكثر.

تمارين:

1. **برهن على ان لكل نقطة يوجد في الاقل مستقيمان يمران بها.**
2. **برهن على انه يوجد في الاقل مستقيم واحد لا يمو من نقطة معلومة.**

<u>٢- بديهيات الترتيب:</u> Axioms of Order

<u>قاعدة لغوية:</u> "بين" هي كلمة اولية تقنية. ويرمز للعبارة "B تقع بين A و C" بالرمز A-B-C.

<u>مجموعة بديهيات:</u>

بديهية ٥: A-B-C اذا وفقط اذا C-B-A.

بديهية ٦ : اذا كانت A-B-C فان النقاط A, B, C مختلفة و تقع على مستقيم واحد.

بديهية ٧: اذا كان A, B, C أي ثلاث نقاط مختلفة وتقع على مستقيم واحد، فان واحدة فقط مما يلي تتحقق:

$$A-B-C \vee A-C-B \vee C-A-B$$

<u>رمز:</u> الرمز A-B-C-D هو مختصر الى A-B-C، A-B-D، A-C-D، B-C-D وبنفس الطريقة بالنسبة لاكثر من اربع نقاط.

بديهية ٨: اذا كانت A, B, C, D اربع نقاط مختلفة وعلى مستقيم واحد وان A-B-C فان واحد فقط مما يلي يتحقق:

$$A-B-C-D \vee A-B-D-C \vee A-D-B-C \vee D-A-B-C$$

بديهية ٩: اذا كانت A و B أي نقطتين فان:

- **أ- توجد نقطة مثل C بحيث ان A-B-C.**
- **ب- توجد نقطة مثل D بحيث ان A-D-B.**
- **ت- توجد نقطة مثل E بحيث ان E-A-B.**

<u>مبرهنة ٣:</u>

1) **اذا كان A-B-C، A-C-D فان النقاط A, B, C, D مختلفة وعلى مستقيم واحد.**
2) **اذا كان A-B-D، B-C-D فان النقاط A, B, C, D مختلفة وعلى مستقيم واحد.**
3) **اذا كان A-B-C، B-C-D فان النقاط A, B, C, D مختلفة وعلى مستقيم واحد.**

البرهان:

١) ∵ A-B-C ، فان النقاط A, B, C مختلفة وعلى مستقيم واحد (بديهية ٦)

وكذلك A-C-D، فان النقاط A, C, D مختلفة وعلى مستقيم واحد(بديهية ٦)

اذا كان B=D

و بما ان A-C-D.

∴ A-C-B

و لكن A-B-C

و هذا يناقض بديهية ٧
لذلك النقاط A, B, C, D تكون مختلفة.
∵ A و C نقطتين مختلفتين.
∴ يوجد مستقيم واحد فقط يحتوي النقطتين A و C (بديهية ١)
∵ B و D تقعان على المستقيم AC
∴ A, B, C, D تقع على مستقيم واحد.

البديهية الخامسة لاقليدس

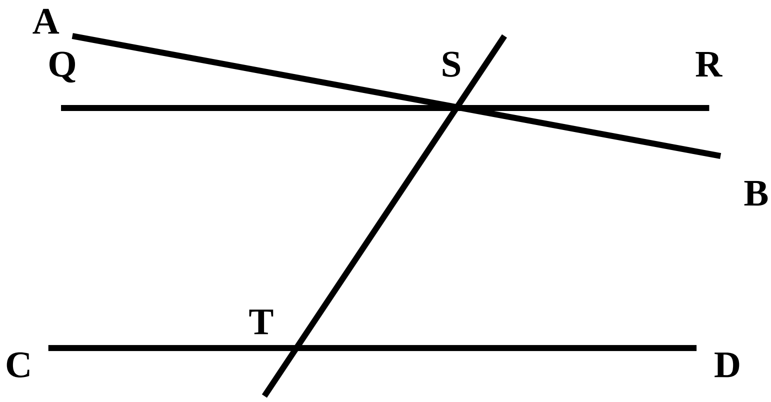
البديهية الخامسة لاقليدس :- اذا قطع مستقيمان بمستقيم ثالث بحيث كان مجموع الزاويتين الداخليتين الواقعتين على جهه واحدة من القاطع اقل من قائمتين، فان المستقيمان، اذا مدا بغير حد، يتلاقيان في تلك الجهة من القاطع التي يكون فيها مجموع الزاويتين اقل من قائمتين.

بعض مكافئات البديهية الخامسة

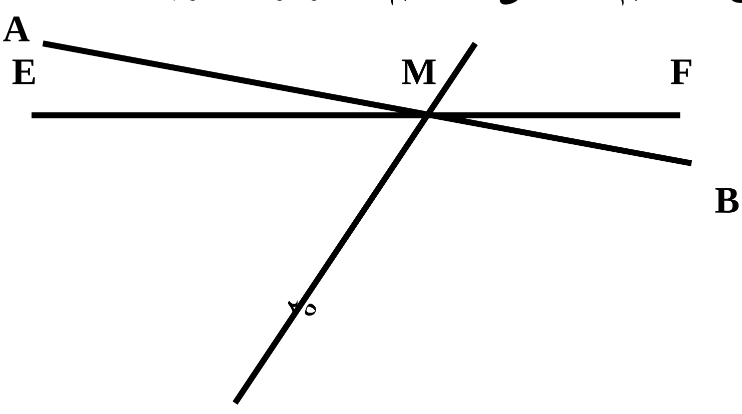
١. بديهية بليفير: من نقطة لا تقع على مستقيم معلوم يمكن رسم موازي واحد فقط للمستقيم المعلوم.
٢. اذا قطع مستقيمين مستقيمين متوازيين فان الزاويتين الداخليتين المتبادلتين متساويتان والزاوية الخارجية تساوي الزاوية الداخلية المقابلة لها وفي نفس الجهة من القاطع وكذلك مجموع الزاويتين الداخليتين الواقعتين على جهة واحدة من القاطع يساوي قائمتين (مبرهنة ٢٩).

٣. مجموع زوايا المثلث يساوي زاويتين قائمتين.
٤. الزاوية الخارجية في المثلث تساوي مجموع الزاويتين الداخليتين المقابلتين لها.
٥. يوجد زوج من المثلثات المتشابهة.
٦. اذا قطع مستقيم احد مستقيمين متوازيين فانه يقطع الأخر.
٧. المسافة العمودية بين مستقيمين متوازيين تكون ثابتة.
٨. يوجد زوج من المستقيمات التي تكون المسافة بينهما ثابتة.
٩. اذا كان مجموع زوايا أي مثلث مقدارا ثابتا فان هذا المجموع يساوي زاويتين قائمتين.
١٠. اذا كانت ثلاث زوايا في شكل رباعي قوائم فالزاوية الرابعة تكون قائمة ايضا.
١١. المستقيمان الموازيان لمستقيم معلوم يكونان متوازيين.
١٢. لاي ثلاث نقاط لا تقع على مستقيم واحد توجد دائرة تمر من هذه النقاط.

و الان سنبين تكافؤ بديهية بليفير مع البديهية الخامسة:
نفرض اولا بديهية بليفير صحيحة، يجب ان نبرهن البديهية الخامسة صحيحة.
البرهان: ليكن AB و CD مستقيمين وقد قطعهما القاطع ST بطريقة بحيث ان مجموع الزاويتين BST و DTS اصغر من قائمتين
ليكن QR خطا يمر من النقطة S بحيث ان مجموع الزاويتين RST و DTS يساوي زاويتين قائمتين
∴ المستقيمان QR و CD متوازيان (مبرهنة ٢٨)
∵ المستقيمان QR و AB مختلفان
∴ من بديهية بليفير :- يوجد موازي واحد فقط للمستقيم CD من S
∴ AB يقطع CD
ويتقاطعان هذان المستقيمان في جهه B و D
واذا تقاطعا في الجهه المقابلة، سيتكون لدينا مثلث مجموع زواياه اكبر من زاويتين قائمتين (وهذا يناقض مبرهنة ٣٢)



ومن اجل اثبات العكس
نفرض ان البديهية الخامسة صحيحة ونبرهن بديهية بليفير
نفرض بان AB و EF موازيان للمستقيم CD من نقطة M
أي المستقيم HM يمر من M ويقطع CD ويصنع زاويتين مجموعهما قائمتين
∴ كل من $\angle MHC + \angle AMH$ و $\angle MHC + \angle EMH$ قائمتين
وهذا تناقض
∴ يجب ان ينطبق المستقيم AB على المستقيم EF وهو المطلوب



محاولات لبرهنة البديهية الخامسة او احدى مكافئاتها:

لقد جرت محاولات لبرهنة البديهية الخامسة، غير ان هذه المحاولات قد باءت بالفشل لانها كانت تعتمد على مكافئاتها.

وفيما يلي بعض من هذه المحاولات:

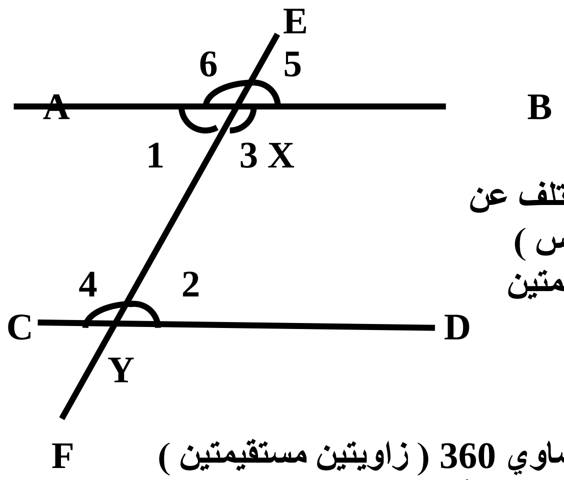
١- بطليموس PTOLEMY

ان اول محاولة لبرهنة بديهية التوازي لاقليدس كانت من قبل العالم الفلكي بطليموس الذي عاش في القرن الثاني للميلاد في مدينة الاسكندرية. حيث حاول بطليموس اولا برهان نظرية ٢٩ بدون استخدام بديهية التوازي ومن استنتاج بديهية التوازي من نظرية ٢٩ وكما يلي:

نظرية ٢٩:-

اذا قطع مستقيمين مستقيمين متوازيين فان الزاويتين الداخليتين المتبادلتين متساويتان والزاوية الخارجية تساوي الزاوية الداخلية المقابلة لها وفي نفس الجهة من القاطع وكذلك مجموع الزاويتين الداخليتين الواقعتين على جهة واحدة من القاطع يساوي قائمتين.

المفروض: AB و CD مستقيمين متوازيين وقد قطعهما القاطع EF في النقطتين X و Y على الترتيب.



المطلوب أثباته: (١) $\angle 1=\angle 2$ و $\angle 3=\angle 4$

(٢) $\angle 2=\angle 5$ و $\angle 4=\angle 6$

(٣) $\angle 1+\angle 4=180, \angle 2+\angle 3=180$

البرهان:

بما ان امتداد المتوازيين في جهه واحدة من القاطع لا يختلف عن امتدادهما في الجهة الاخرى من القاطع (فرضية بطليموس)

(١) اذا كان مجموع الزاويتين الداخليتين 2,3 اقل من قائمتين فان مجموع الزاويتين الداخليتين 4,1 يكون ايضا اقل من قائمتين (حسب فرضية بطليموس)

اذن مجموع الزوايا الداخلية 4,3,2,1 اقل من 360

وهذا غير ممكن لان مجموع الزوايا الداخلية 4,3,2,1 يساوي 360 (زاويتين مستقيمتين)

(٢) اذا كان مجموع الزاويتين الداخليتين 2,3 اكبر من قائمتين فان مجموع الزاويتين الداخليتين 4,1 يكون ايضا اكبر من قائمتين (حسب فرضية بطليموس)

اذن مجموع الزوايا الداخلية 4,3,2,1 اكبر من 360

وهذا غير ممكن ايضا لان مجموع الزوايا الداخلية 4,3,2,1 يساوي 360 (زاويتين مستقيمتين)

اذن يجب ان يكون مجموع الزاويتين الداخليتين 3,2 يساوي قائمتين

أي ان $\angle 1+\angle 4=180, \angle 2+\angle 3=180$

بما ان $\angle 1+\angle 3=180$ (زاوية مستقيمة)

اذن $\angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 3$ وبطرح $\angle 3$ من الطرفين ينتج ان $\angle 1=\angle 2$

وبنفس الطريقة نبرهن ان $\angle 3=\angle 4$

وكذلك بما ان $\angle 5+\angle 3=180$ (زاوية مستقيمة)

اذن $\angle 5+\angle 3=\angle 2+\angle 3$ وبطرح $\angle 3$ من الطرفين ينتج ان $\angle 5=\angle 2$

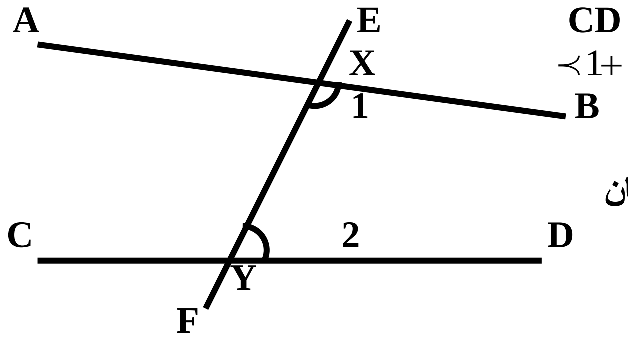
وبنفس الطريقة نبرهن ان $\angle 6=\angle 4$

الانتقاد:

اعتمد بطليموس في برهانه لنظرية ٢٩ على ان (امتداد المتوازيين في جهة واحدة من القاطع لا يختلف عن امتدادهما في الجهة الاخرى من القاطع) وهذا هو تعبير اخر لبديهية بليفير الذي نصها هو (من نقطة

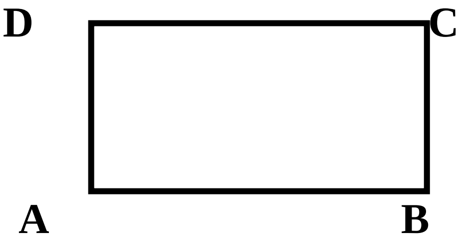
خارج مستقيم معلوم يمكن رسم موازي واحد فقط لذلك المستقيم) أي ان بطليموس قد فرض بديهية (بديهية بليفير) تكافيء بديهية التوازي من حيث لا يعلم بذلك وبهذا يكون بطليموس قد افترض ما يجب برهانه.
الان نبرهن بديهية التوازي لاقليدس باستخدام نظرية ٢٩:

بديهية التوازي لاقليدس:
اذا قطع مستقيمان بمستقيم ثالث بحيث كان مجموع الزاويتين الداخليتين الواقعتين على جهه واحدة من القاطع اقل من قائمتين، فان المستقيمان، اذا مدا بغير حد، يتلاقيان في تلك الجهة من القاطع التي يكون فيها مجموع الزاويتين اقل من قائمتين.



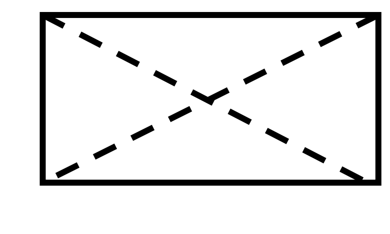
المفروض: المستقيم EF يقطع المستقيمين AB و CD
في النقطتين Y,X على الترتيب بحيث $\angle 1 + \angle 2 < 180$
المطلوب اثباته: المستقيمان AB و CD
يتلاقيان من جهة B وD
البرهان: اذا لم يكن المستقيمان AB و CD متلاقيان
فانهما متوازيان
اذن $\angle 1 + \angle 2 = 180$ (نظرية ٢٩)
وهذا خلاف الفرض لان $\angle 1 + \angle 2 < 180$
اذن المستقيمين AB وCD يجب ان يتلاقيان
لو كان المستقيمان AB و CD متلاقيان من جهة C,A لاصبح لدينا مثلث فيه زاويتين مجموعهما اكبر من زاويتين قائمتين وهذا يناقض نظرية ١٧
اذن المستقيمان AB و CD يتلاقيان من جهة D,B

٢- محولة عمر الخيام:
حاول عمر الخيام ان يبرهن (اذا احتوى الشكل الرباعي على ثلاث زوايا قوائم فان الزاوية الرابعة تكون قائمة ايضا)



رباعي الخيام : لتكن AB قطعة مستقيم وان AD و BC عمودان على AB بحيث ان $A-D \cong B-C$ ثم نصل CD فيتكون لدينا شكل رباعي ABCD فيه $\angle ABC \cong \angle BAD$ قوائم $A-D \cong B-C$ ويسمى هذا الشكل الرباعي (برباعي الخيام) وكذلك يسمى الضلع AB الذي يصل بين الزاويتين القائمتين (بالقاعدة) ويسمى الضلع DC الذي يقابل القاعدة (بالسمت) والضلعين المتساويين AD و BC يسميان (بساقي رباعي الخيام) والزاويتين BCD و ADC المقابلتين الى زاويتي القاعدة يسميان (بزاويتي السمت)
يطلق على رباعي الخيام من قبل الغرب (برباعي ساكيري) نسبتا الى العالم الايطالي ساكيري (SACCHERI) ولكن الخيام احق بهذه التسمية لانه سبق ساكيري بما يزيد عن ستمائة سنة.

الان نتطرق الى برهان عمر الخيام والذي كان حسب التسلسل الاتي:
اولا: برهن عمر الخيام ان (زاويتي السمت في رباعي الخيام متساويتان)
المفروض: ABCD رباعي الخيام
المطلوب اثباتة: $\angle BCD \cong \angle ADC$
البرهان: نصل BD و AC
المثلثين ABC و ABD فيهما:
فيه $\angle ABC \cong \angle BAD$ قوائم ، $A-D \cong B-C$ ساقي رباعي



الخيام، AB مشترك

اذن يتطابق المثلثان ABC و ABD (لتساوي ضلعين والزاوية المحصورة بينهما)   B   A

ومن التطابق ينتج ان $A-C\cong B-D$ (تتساوى الاجزاء المتناظرة في الاشكال المتطابقة)

المثلثين ADCو BDC فيهما

فيه $A-C\cong B-D$ بالبرهان، $A-D\cong B-C$ ساقي رباعي الخيام، CD مشترك

اذن يتطابق المثلثان ADC و BDC (لتساوي ثلاثة اضلاع)

ومن التطابق ينتج بان $\angle BCD\cong\angle ADC$ (تتساوى الاجزاء المتناظرة في الاشكال المتطابقة)

ثانيا: برهن عمر الخيام ان (المستقيم الواصل بين منتصفي القاعدة والسمت في رباعي الخيام يكون عموديا عليهما)

المفروض: ABCD رباعي الخيام، النقطة X منتصف القاعدة AB، النقطة Y منتصف السمت CD.

المطلوب اثباتة: $XY\perp AB, XY\perp CD$.

البرهان: نصل CX ، DX

المثلثين ADX،BCX فيهما:

فيه $\angle CBX\cong\angle DAX$ قوائم ، $A-D\cong B-C$ ساقي رباعي الخيام، $A-X\cong B-X$ بالتنصيف

اذن يتطابق المثلثين ADX، BCX (لتساوي ضلعين والزاوية المحصورة بينهما)

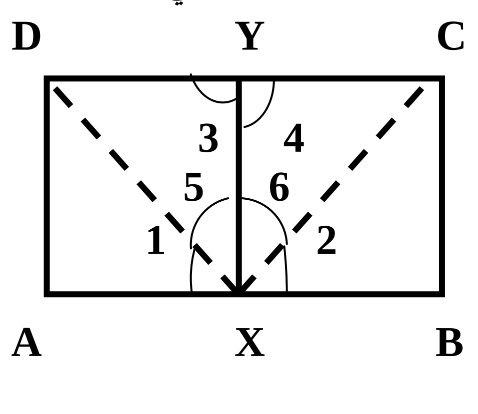
ومن التطابق ينتج ان $D-C\cong C-X, \angle 2\cong\angle 1$ (تتساوى الاجزاء المتناظرة في الاشكال المتطابقة)

المثلثين DXY، CXY فيهما

$D-C\cong C-X$ بالبرهان، $D-Y\cong Y-C$ بالتنصيف، XY مشترك

اذن يتطابق المثلثان DXY ، CXY (لتساوي ثلاثة اضلاع)

ومن التطابق ينتج بان $\angle 6\cong\angle 5, \angle 4\cong\angle 3$ (تتساوى الاجزاء المتناظرة في الاشكال المتطابقة)



بما ان $\angle 3+\angle 4=180$ (زاوية مستقيمة)

اذن كل من $\angle 4, \angle 3$ زاوية قائمة

هذا يعني ان $XY\perp CD$

بما ان $\angle 6\cong\angle 5, \angle 2\cong\angle 1$ بالبرهان

ذن $\angle 6+\angle 2=\angle 5+\angle 1$

لكن $\angle 5+\angle 1\cong\angle AXY, \angle 6+\angle 2\cong\angle BXY$

اذن $\angle AXY\cong\angle BXY$

بما ان $\angle AXY+\angle BXY\cong 180$ زاوية مستقيمة

اذن كل من $\angle AXY, \angle BXY$ زاوية قائمة

هذا يعني ان $XY\perp AB$

ثالثا : بعد ذلك اخذ عمر الخيام الشكل الرباعي XBCY والذي فيه ثلاث زوايا قوائم

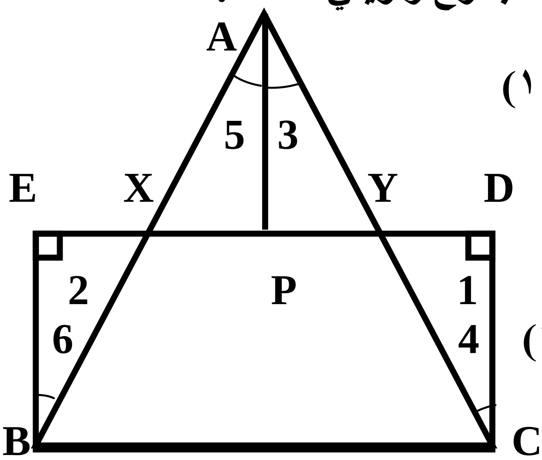
بما ان $\angle CXY+\angle BXY\cong 180$ زاويتين قائمتين

اذن المستقيم AB يوازي المستقيم CD (نظرية ٢٨)

بما ان $X-Y\cong B-C$ (المسافة العمودية بين مستقيمين متوازيين تكون ثابتة)

اذن XBCY رباعي الخيام

بما ان $\angle BCY \cong \angle XYC$ زاويتي السمت في رباعي الخيام متساويتان
وكذلك $\angle XYC$ قائمة
اذن $\angle BCY$ قائمة
الانتقاد:
ان الخلل في برهان عمر الخيام لأحدى مكافئات بديهية التوازي لاقليدس (اذا احتوى الشكل الرباعي على ثلاث زوايا قوائم فان الزاوية الرابعة تكون قائمة ايضا) هو اعتماده على بديهية تكافئ أيضا بديهية التوازي لاقليدس والتي هي (المسافة العمودية بين مستقيمين متوازيين تكون ثابتة)
مبرهنة ١:
مجموع زوايا المثلث يساوي مجموع زاويتي السمت لرباعي الخيام الناشئ من أنزال عمودين من نهايتي احد أضلاعه على المستقيم الواصل بين منتصفي الضلعين الآخرين.
المفروض: ABC مثلث وقد نصف ضلعاه AB, AC في النقطتين X,Y على الترتيب ثم وصل XY ومد على استقامته من جهتيه وانزل CD, BE عمودين على امتداد XY.
المطلوب اثباته: مجموع زوايا المثلث ABC يساوي مجموع زاويتي السمت.

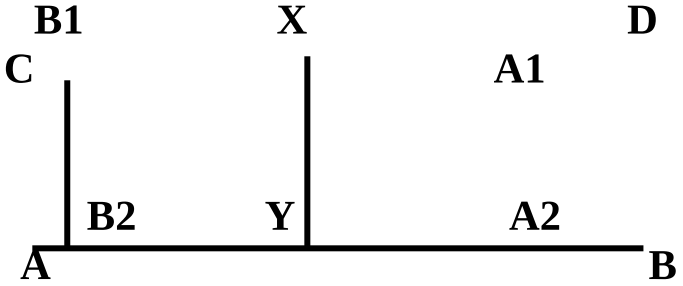


البرهان:
من نقطة A نرسم AP عمودي على ED (نظرية ١٢)
اذن كل من $\angle 2, \angle 1$ قوائم
المثلثين CDY, APY متطابقين (نظرية ٢٦)
ومن التطابق ينتج $\angle 3 \cong \angle 4, A-P \cong C-D$
(تتساوى الأجزاء المتناظرة في الأشكال المتطابقة)
وكذلك المثلثين BEX, APX متطابقين (نظرية ٢٦)
ومن التطابق ينتج $\angle 5 \cong \angle 6, A-P \cong B-E$
(تتساوى الأجزاء المتناظرة في الأشكال المتطابقة)
اذن $C-D \cong B-E$
الشكل BCDE رباعي الخيام قاعدته DE وسمته BC
يجب ان نبرهن الان $\angle ABC+\angle BCA+\angle CAB \cong \angle EBC+\angle BCD$
بما ان $\angle CAB \cong \angle 3+\angle 5, \angle BCA \cong \angle BCD-\angle 4, \angle ABC \cong \angle EBC-\angle 6$
(الكل اكبر من الجزء ويساوي مجموع الاجزاء)
$\angle ABC+\angle BCA+\angle CAB \cong \angle EBC-\angle 6+\angle BCD-\angle 4+\angle 3+\angle 5$
بما ان $\angle 4 \cong \angle 3, \angle 6 \cong \angle 5$ بالبرهان
$\angle ABC+\angle BCA+\angle CAB \cong \angle EBC-\angle 5+\angle BCD-\angle 3+\angle 3+\angle 5 \cong \angle EBC-\angle BCD$
اذن مجموع زوايا المثلث ABC يساوي مجموع زاويتي السمت.

٣- نصير الدين الطوسي (١٢٠١-١٢٧٤م)
حاول نصير الدين الطوسي ان يبرهن على ان (مجموع زاويتي السمت في رباعي الخيام يساوي زاويتين قائمتين) ومن المبرهنة السابقة (مجموع زوايا المثلث يساوي مجموع زاويتي السمت في رباعي الخيام) نستنتج ان (مجموع زوايا المثلث يساوي زاويتين قائمتين) ولكن قبل ان يبرهن وضع الفرضية الاتية:
اذا رسم المستقيمان AB, CD بحيث كانت الاعمدة A1A2, XY, B1B2, ... الخ المرسومة من CD الى AB تصنع مع CD زوايا حادة من جهة C وبالتالي تصنع زوايا

منفرجة من جهة D. فان المستقيمان CD, AB يتباعدان من جهة B, D ويتقاربان من جهة A, C وبذلك تقصر الاعمدة من جهة الزوايا الحادة وتطول من جهة الزوايا المنفرجة والعكس صحيح كذلك.

أي ان $B1-B2<X-Y<A1-A2$



وبعد ان وضع الطوسي هذه الفرضية وسلم بها دون برهان اتخذ الشكل الرباعي ABCD (رباعي الخيام) الذي سمته CD وقاعدته AB

المفروض: ABCD رباعي الخيام.

المطلوب اثباته: مجموع زاويتي السمت يساوي زاويتين قائمتين

أي ان $<ADC+<BCD=180$.

البرهان:

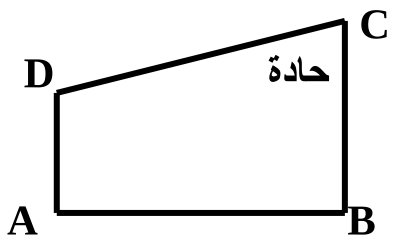
اذا لم تكن <BCD قائمة

فهنالك احتمالان اما ان تكون حادة او منفرجة

اذا كانت <BCD حادة

بما ان BC, AD اعمدة على AB

اذن $A-D<B-C$ حسب فرضية الطوسي



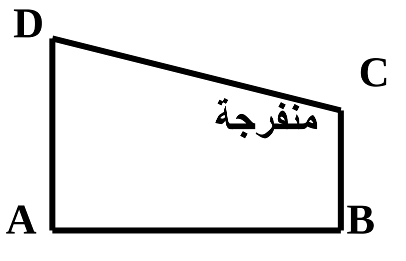
وهذا غير ممكن لان A-D=B-C ساقي رباعي الخيام

اذن <BCD لا يمكن ان تكون حادة

اما اذا كانت <BCD منفرجة

بما ان BC, AD اعمدة على AB

اذن $A-D>B-C$ حسب فرضية الطوسي



وهذا غير ممكن لان A-D=B-C ساقي رباعي الخيام

اذن <BCD لا يمكن ان تكون منفرجة

اذن <BCD يجب ان تكون قائمة

وبنفس الطريقة <ADC قائمة

اذن مجموع زاويتي السمت في رباعي الخيام يساوي قائمتين

<u>الانتقاد:-</u>

ان الخلل في برهان نصير الدين الطوسي هو لم يبرهن الفرضية التي اعتمد عليها في برهانه.

٤- ساكيري: Saccheri   (١٦٦٧- ١٧٣٣م)

حاول جيرو لامو ساكيري ان يبرهن (مجموع زاويتي السمت في رباعي الخيام يساوي مجموع زاويتين قائمتين). حيث كانت طريقته في البرهان تختلف عن طريقة نصير الدين الطوسي، حيث استخدم طريقة التناقض في البرهان (افترض مجموع زاويتي السمت في رباعي الخيام لا يساوي زاويتين قائمتين والوصول الى تناقض منطقي استنتاجي) فهنالك احتمالين هما:

الاحتمال الأول: أذا كان مجموع زاويتي السمت في رباعي الخيام اكبر من قائمتين.

بما ان زاويتي السمت في رباعي الخيام متساويتين.

اذن كل زاوية من زاويتي السمت تكون منفرجة.
وقبل الوصول الى التناقض توصل الى عدة نتائج غريبة ومنها ما يلي:

١- القاعدة أطول من السمت.
٢- مجموع زوايا المثلث تكون دائما اكبر من قائمتين.
٣- الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة تكون دائما منفرجة.

الاحتمال الثاني: أذا كان مجموع زاويتي السمت في رباعي الخيام اقل من قائمتين.
بما ان زاويتي السمت في رباعي الخيام متساويتين.
اذن كل زاوية من زاويتي السمت تكون حادة.
وكذلك قبل الوصول الى التناقض توصل الى عدة نتائج غريبة ومنها ما يلي:

١- السمت أطول من القاعدة.
٢- مجموع زوايا المثلث تكون دائما اقل من قائمتين.
٣- الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة تكون دائما حادة.
٤- من نقطة خارج مستقيم يمكن رسم على الأقل مستقيمين موازيين لذلك المستقيم.
٥- ليس من الضروري ان يكون لكل خطين متوازيين عمود مشترك دائما.
٦- اذا قطع مستقيمان بمستقيم ثالث بحيث كان مجموع الزاويتين الداخليتين الواقعتين على جهة واحدة من القاطع اقل من قائمتين، فأنة ليس من الضروري أن يلتقيا أذا مدا من تلك الجهة، أي أنهما يكونان متوازيان أحيانا.

ولقد بلغت براهين ساكيري (في كلا الحالتين) ذروة القمة ولكنة لم يتوصل الى تناقض منطقي استنتاجي.

بعد هذه المحاولات من جهود العلماء بدء الرياضيون يشكون في أمكانية برهان بديهية التوازي لإقليدس ولم تحل هذه المشكلة الا بعد ان قام العالمان بوليا الهنكاري (١٨٠٢- ١٨٦٠م) و لوبا جيفسكي الروسي (١٧٩٣- ١٨٥٦م) كل على حدة ببناء هندسة جديدة تستند الى نقيض البديهية الخامسة (بديهية التوازي) مع بقاء بديهيات اقليدس سارية سميت هذه الهندسة بالهندسة اللااقليدية وهذه الهندسة تتكون من قسمين باعتبار وجود نقيضين لبديهية التوازي (او مكافئاتها):
النقيض الاول:
(وجود اكثر من مواز واحد لمستقيم معلوم من نقطة خارجة عنه) وهذا الافتراض ادى الى بناء هندسة جديدة سميت (بالهندسة الهذلولية) (Hyperbolic geometry) وفي هذه الهندسة خواص تختلف عن الهندسة الاقليدية منها مجموع زوايا المثلث اقل من قائمتين، مساحه المثلث تتناسب مع نقصان مجموع الزوايا عن القائمتين، لا يوجد تشابة بين المثلثات او المضلعات وغير ذلك.
النقيض الثاني:
(لا يمكن رسم أي مواز لمستقيم معلوم من نقطة خارجة عنه) يعني عدم وجود التوازي أي ان جميع المستقيمات تتقاطع وهذا الافتراض أدى الى بناء هندسة جديدة سميت (بالهندسة الاهليليجية) (Eilliptic Geometry) ويمكن تمثيل هذه الهندسة على سطح كرة واعتبار المستقيمات اجزاء من دوائر عظمى وفي هذه الهندسة خواص تختلف عن الهندسة الاقليدية منها مجموع زوايا المثلث أكثر من قائمتين، مساحة المثلث تتناسب مع زيادة مجموع الزوايا عن القائمتين، لا يوجد تشابه بين المثلثات او المضلعات وغير ذلك.

وفي عام ١٨٦٨م برهن العالم الايطالي لبلترامي عن عدم التناقض ما بين هذه الهندسات او ما بينها وبين الهندسة الاقليدية وبذلك انتهت مشكلة التوازي وثبت عدم أمكان استنتاج هذه البديهية من البديهيات الأخرى.

الهندسة اللاأقليدية

الان سنتطرق الى نوعين مختلفين لهندسات لااقليدية هما:

اولا: الهندسة الهذلولية (الزائدية) Hyperbolic Geometry

الهندسة الهذلولية هي احدى الهندسات اللااقليدية والتي عمل على بنائها وتطويرها كلا من العالمين جون بوليا الهنكاري ولوبا جفسكي الروسي في حدود (١٨٢٠- ١٨٣٠م) وذلك باخذ نقيض بديهية بليفير (أحدى مكافئات بديهية التوازي لاقليدس) والذي هو (من نقطة لا تقع على خط معلوم، يمكن رسم اكثر من مواز واحد لذلك الخط المعلوم).

وبهذا اصبحت الهندسة الهذلولية نظام بديهي يعتمد على البديهيات الاربعة الاولى لاقليدس بالاضافة الى بديهية اخرى تناقض بديهية التوازي لاقليدس والتي سميت بالبديهية المميزة للهندسة الهذلولية او بديهية التوازي الهذلولية.

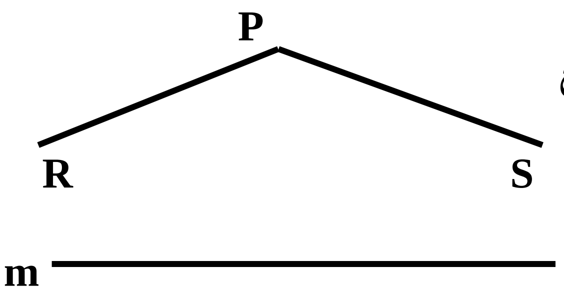
بديهية التوازي الهذلولية Hyperbolic Parallel Postulate (HPP)

اذا كانت P نقطة ما لا تقع على خط معلوم m، فانه يوجد شعاعين فقط وليكن PR و PS بحيث ان:

١- PS, PR شعاعين غير متعاكسين.

٢- PS, PR لايقطعان m.

٣- أي شعاع PQ يقطع m اذا وفقط اذا كان PQ يقع بين PR, PS.



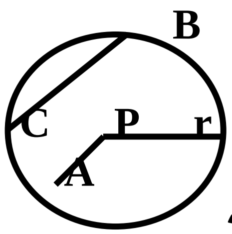
وان أي من الشعاعين PR, PS في البديهية HPP يسمى موازي الى الخط m من النقطة P.

تمثيل الهندسة الهذلولية:

لغرض تمثيل الهندسة الهذلولية باستخدام المفاهيم والمصطلحات الاقليدية، سنذكر نموذج يعبر عن نوع من التوازي:

نموذج كلاين Klein Model

ليكن لدينا دائرة مركزها النقطة P ونصف قطرها r



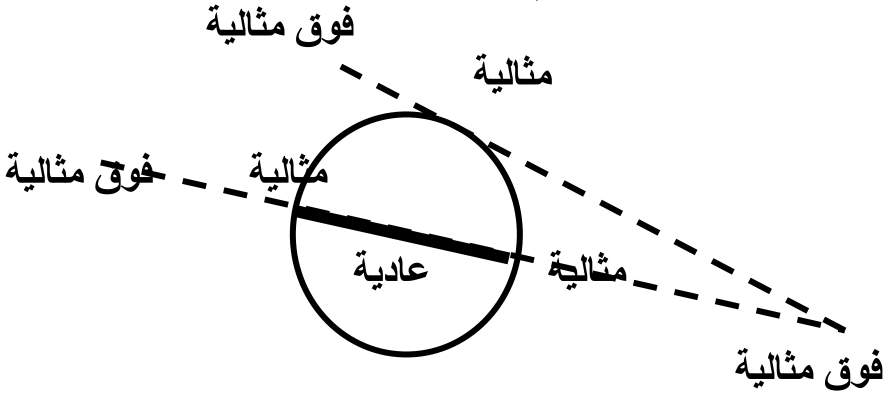
١- المستوي الهذلولي هو مجموعة كل النقاط التي تقع داخل الدائرة أي هو مجموعة كل النقاط A بحيث ان PA<r.

٢- اذا كان BC وتر في دائرة، حيث B وC نقطتين على محيط الدائرة، فان الوتر الذي لا يحوي طرفية يسمى وتر مفتوح، ويرمز له بالرمز BC والذي يمثل الخط في الهندسة الهذلولية.

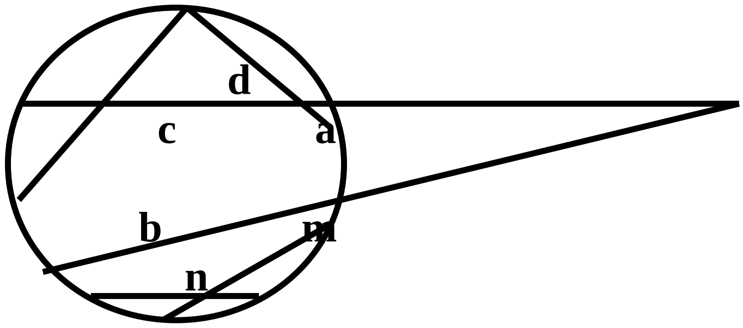
٣- قطعة المستقيم في الهندسة الهذلولية هي قطعة المستقيم الواصلة بين نقطتين في داخل الدائرة مثل PA.

٤- النقاط التي تقع داخل الدائرة تسمى بالنقاط العادية والتي تقع في محيط الدائرة تسمى بالنقاط المثالية والتي تقع خارج الدائرة تسمى بالنقاط فوق المثالية.

ان كل نقطتين (عاديتين ، مثاليتين ، عادية ومثالية ، عادية وفوق مثالية ،مثالية وفوق مثالية) يوجد خط واحد فقط يحتويهما ولكن ليس من الضروري ان لكل نقطتين فوق مثاليتين يوجد خط يحتويهما.

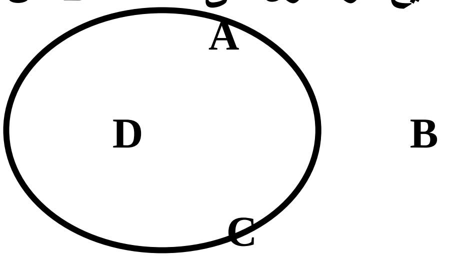


الان نستطيع القول ان أي خطين لكلاين يلتقيان في نقطة عادية او مثالية او فوق مثالية، معتمدا على انه اذا كانت تلك الخطوط متقاطعة او متوازية تقاربيا او متوازية انفراجيا على التوالي.
٥- اذا كان الخطان متوازيان حديا فانهما يتقاطعان في نقطة مثالية اما اذا كان الخطان غير متقاطعان او متوازيين بعمود مشترك فانهما يتقاطعان في نقطة فوق مثالية.



ثانيا: الهندسة الاهليليجية (الناقصية) **Elliptic Geometry**
الهندسة الاهليليجية هي احدى الهندسات اللاقليدية والتي اول من اشار اليها هو العالم الالماني بيرنهارد ريمان (١٨٢٦-١٨٦٦م) وذلك باخذ نقيض بديهية بليفير (احدى مكافئات بديهية التوازي لاقليدس) والذي هو (لا يمكن رسم أي موازي لخط معلوم من نقطة خارجة عنة) وهذا يعني عدم وجود التوازي في هذه الهندسة.
في دراستنا السابقة للهندسة الاقليدية والهندسة الهذلولية بينا بانه لا يوجد فرق بين خط غير منتهي وخط غير محدود، ولكن في هذه الهندسة ميز ريمان بين فكرة الخط غير المنتهي والخط غير المحدود، حيث افترض ريمان الخاصية التالية للخطوط (جميع الخطوط منتهية وغير محدودة).
مثلا :- لو افترضنا ان خطا مرسوما حول كره (أي انه دائرة)
بما ان محيط الدائرة معلوم فان طول الخط منتهي ولكنه غير محدود في المفهوم الذي فيه تستمر حول الكره بدون توقف. وان هذا لا يناقض بديهية التوازي فقط لكنه يناقض الفرضية بان الخطوط غير منتهية في الطول. وبهذا تكون الكرة هي نموذج لهذه الهندسة.
ومن الملاحظ ايضا في هذه الهندسة هو لا تستطيع الاخذ ببديهيات الرتبة (البين) لان لانهائية الخط هي نتيجة لهذه البديهيات ولا نستطيع القول بان النقطة **B** تقع بين النقطتين **A, C** اذن يجب حذف بديهيات الرتبة ويحل محلها بديهيات الفصل.

مثلا: النقطتين C, A تفصلان B, D على الدائرة حيث لاتستطيع الوصول الى النقطة D من النقطة B دون المرور بالنقطة C.



وكذلك القطعة AB المكونة من النقطتين B, A بالاضافة للنقاط الواقعة بينهما ليس لها معنى على الدائرة .

تمثيل الهندسة الاهليليجية:

لقد استطاع ريمان ايجاد فضاء تتحقق فيه فرضياته وكان ذلك هو سطح الكرة حيث مثل فيه الخطوط بدوائر عظمى على سطح الكرة وسمى تلك الهندسة بالهندسة الاهليليجية المزدوجة لان كل خطين في هذه الهندسة يتقاطعان في نقطتين مختلفتين حيث تسمى هاتين النقطتين بالنقاط المتقابلة (وهي النقاط التي تجزء الخط الى قطعتين متساويتين) ويمكن تمثيل هذه الهندسة باستخدام المصطلحات والمفاهيم الاقليدية وذلك باستخدام الهندسة الكروية الاقليدية حيث النقطة في هذه الهندسة تمثل نقطة على سطح الكرة والخط يمثل دائرة عظمى على كرة وقطعة المستقيم تمثل قوس من دائرة عظمى والبعد بين نقطتين يمثل طول اقصر قوس من الدائرة يصل بين النقطتين والزاوية تمثل زاوية كروية مكونة من دوائر عظمى وقياس الزاوية هو قياس الزاوية الكروية.

وكذلك توجد هندسة اهليليجية احادية حيث كل خطين فيها يتقاطعان في نقطة واحدة. ويمكن الحصول على نموذج الهندسة الاهليليجية الاحادية باخذ نصف كرة فقط.

	الاقليدية	الهذلولية	الاهليليجية
يتقاطع المستقيمان في	نقطة واحدة في الاكثر	نقطة واحدة على الاكثر	نقطة واحدة (الاحادية) نقطتان (المزدوجة)
ليكن l مستقيما و P نقطة لا تقع على l فانة	يوجد موازي واحد وواحد فقط للمستقيم l من P	يوجد موازيان للمستقيم l من P	لا يوجد موازي الى l من P
يفصل المستقيم الى نصفين	بواسطة نقطة	بواسطة نقطة	كلا
عمودان على نفس المستقيم يكونان	متوازيين	غير متوازيين	متقاطعان
مجموع زوايا مثلث	يساوي زاويتان قائمتان	اقل من زاويتين قائمتين	اكثر من زاويتين قائمتين